



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Una Aproximación a un Problema Particular de Dedekind y Secciones del Carcaj de Auslander-Reiten en Álgebras Hereditarias de Tipo Representación Finito

Gabriel Bravo Rios

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2016

Una Aproximación a un Problema Particular de Dedekind y Secciones del Carcaj de Auslander-Reiten en Álgebras Hereditarias de Tipo Representación Finito

Gabriel Bravo Rios

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D. Agustín Moreno Cañadas

Línea de Investigación: Teoría de Representaciones
Grupo de Investigación TERENUFIA-UNAL

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2016

Director
Profesor Agustín Moreno Cañadas

Jurado No. 1

Dedicatoria

A mi esposa Estefania y mi hijo Andres, mis padres Claudia y Gabriel, mi hermano Jorge, mi sobrino Juan Esteban y a mi abuela Elvia.

Agradecimientos

Agradecimientos a Estefania Preciado y Gabriel Andres Bravo por estar siempre a mi lado y compartir estos bellos momentos, a mis padres Claudia Rios y Gabriel Bravo por el todo el amor brindado, a Jorge Enrique Bravo, Juan Esteban Bravo y Elvia Barrera por la paciencia que me han tenido, al profesor Agustín Moreno Cañadas por creer en mi y brindarme esta gran oportunidad de seguir creyendo en este sueño, a Pedro Fernando Fernandez por nuestra amistad y seguir recorriendo este camino lleno de satisfacciones y a mis compañeros del Grupo TERENUFIA Isaías Marín y Verónica Cifuentes por compartir este proceso.

Resumen

Fahr y Ringel [13, 14] presentan una fórmula de partición para los números de Fibonacci de índice par usando el carcaj de Auslander-Reiten del carcaj 3–Kronecker e introducen el término categorificación para una sucesión de números enteros.

En este trabajo, se usará la estructura de algunas álgebras de caminos de tipo representación infinito para obtener una fórmula del número de anticadenas de dos puntos en el conjunto de partes de n elementos ordenado por la inclusión y categorificaciones de las sucesiones A083329, A052951, A049611 y A000295 en la OEIS que están dadas por el uso del número de secciones con un sumidero en el carcaj de Auslander-Reiten de álgebras de caminos del tipo $k\Delta$ donde Δ es un diagrama de Dynkin orientado del tipo A_n, D_n, E_6, E_7 y E_8 .

Palabras Cables : Secciones en el carcaj de Auslander-Reiten, Categorificación, Álgebras Dynkin, Funciones Dynking, Anticadenas, Números de Dedekind, Representación Indescomponible, Álgebra de Caminos.

Abstract

Fahr and Ringel [13, 14] presented a partition formula for the even index Fibonacci numbers using the Auslander-Reiten quiver of the 3–Kronecker quiver and introduced the term categorification for a sequence of integer numbers.

In this work, it will be used the structure of some path algebras of infinite representation type in order to obtain a formula the number of two-point antichains in the powerset 2^n of an n -element set ordered by inclusion and categorifications of the integer sequences A083329, A052951, A049611 and A000295 in the OEIS which are given by using the number of sections in the Auslander-Reiten quiver of path algebras of type $k\Delta$ where Δ is an oriented Dynkin diagram of type A_n, D_n, E_6, E_7 and E_8 .

Keywords : Auslander-Reiten section, Categorification, Dynkin algebra, Dynkin function, Anti-chain, Dedekind Number, Indecomposable Representation, Path Algebra.

Introducción

El propósito principal de este trabajo es el de establecer categorizaciones algebraicas llamada también categorificaciones de algunas sucesiones de números enteros. Cabe señalar, que el término categorificación para sucesiones de números enteros fue acuñado por Ringel y Fahr en [13, 14] como el proceso por medio del cual los números en una sucesión pueden verse como invariantes de objetos en una categoría dada. Ringel y Fahr en [13] usaron las componentes preproyectiva y preinjectiva del carcaj de Auslander-Reiten del carcaj 3-Kronecker para generar una categorificación algebraica de los números de Fibonacci.

Cabe anotar que de acuerdo a Ringel [14] el objeto de este trabajo. Esto es, la interpretación de elementos de una sucesión de números enteros como invariantes de objetos en una categoría no ha sido estudiado de una manera sistemática y que solo pocos registros en este sentido están disponibles. Entre ellos se pueden resaltar los trabajos de Gabriel-De la Peña, Bretscher-Läser-Riedtmann y Seidel quien fue estudiante de Happel.

Poco después de la introducción del concepto de categorificación nuevos resultados han surgido en esa dirección, por ejemplo Hubery, Krausse, Thomas, Ingalls y otros autores han usado álgebras de conglomerado para establecer una categorificación del retículo constituido por particiones no-interceptantes en el sentido de Kreweras. Otros ejemplos interesantes de categorificaciones son aquellas asociadas a los números de Catalan [15] como lo son el número de módulos tilting de soporte, libres de multiplicidad o el números de variables de conglomerado en un álgebra del tipo Dynkin \mathbb{A}_n .

A la fecha la enciclopedia OEIS (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) se ha constituido en una herramienta fundamental para investigaciones como las que se proponen en este trabajo, por ejemplo A.M Cañadas, H. Giraldo y otros autores [6, 7] han generado categorificaciones de las sucesiones A002662, A052558 y A016269 con la ayuda del número de indescomponibles en la categoría de representaciones de algunos conjuntos parcialmente ordenados en los que es posible una diferenciación con respecto a un punto maximal, módulos de Kronecker y módulos proyectivos de algunos ordenes tejados o anillos semimaximales. A todo esto, Ringel [15] sugiere la creación de una nueva enciclopedia con objetivos similares a los propuestos por la OEIS pero cuyo objeto de estudio sea las funciones Dynkin, esto es, funciones a valor entero independientes de orientación (mas generalmente a valor real) para las que las categorificaciones sean inducidas por los diagramas de Dynkin $\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8, \mathbb{F}_4$ y \mathbb{G}_2 . Las álgebras de caminos $k\Delta$ inducidas por estos diagramas son álgebras de artin hereditarias de tipo representación finito.

En este trabajo se generan categorificaciones de distintos tipos de sucesiones en la OEIS y se sugiere el número de secciones en el carcaj de Auslander-Reiten de las álgebras de tipo Dynkin como un ejemplo de función Dynkin [2] y se presentará una fórmula del número de anticadenas de dos elementos del conjunto de potencias 2^n ordenado por la inclusión usando la estructura de algunas álgebra de caminos de tipo representación infinita [1].

CONTENIDO

Resumen	XI
Introducción	XII
1. Preliminares	1
1.1. Álgebras y Módulos	1
1.1.1. K –álgebras	1
1.1.2. A –módulos	2
1.2. Representaciones de un Carcaj	4
1.2.1. Carcaj	4
1.2.2. Álgebra de Caminos	5
1.2.3. Representación de un Carcaj	7
1.3. Teoría de Auslander-Reiten	9
1.3.1. Sucesiones que Casi Escinden	9
1.3.2. Carcaj de Auslander-Reiten y Carcaj de Traslación	11
1.4. Conjuntos Parcialmente Ordenados	15
1.4.1. Poset	15
1.4.2. Representaciones de un Poset	16
2. Anticadenas	19
2.1. Un Álgebra de Caminos	20
2.2. Sobre el Poset \mathcal{H}_k	24
2.3. Un Caso del Número de Anticadenas en el Conjunto 2^n	28

3. Número de Secciones en el Carcaj de Auslander-Reiten de Álgebras del Tipo Dynkin	31
3.1. Del Tipo \mathbb{A}_n	31
3.2. Del Tipo \mathbb{D}_n	37
3.3. Del Tipo $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ y \mathbb{E}_8	45
4. Conclusiones y Trabajo Futuro	49
4.1. Conclusiones	49
4.2. Trabajo Futuro	49
Bibliografía	50

CAPÍTULO

1

PRELIMINARES

En este capítulo se presentará una breve introducción de los conceptos necesarios para el desarrollo del trabajo. En particular, se dan los conceptos de álgebra, módulo, carcaj y conjuntos parcialmente ordenados los cuales se encuentran descritos en [5, 8, 11, 18].

1.1. Álgebras y Módulos

En esta sección se presentarán las definiciones de álgebra y módulo, se describirá la categoría de los módulos y presentarán los conceptos de álgebra básica y hereditaria [18].

1.1.1. K -álgebras

Definición 1.1.1. Sea K un campo, una K -álgebra es un anillo A con un elemento identidad (notado por 1), tal que A tiene una estructura de K -espacio vectorial compatible con la multiplicación del anillo y es tal que:

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$$

para todo $\lambda \in K$ y todo $a, b \in A$.

Ejemplo 1.1.1. El anillo $K[t]$ de todos los polinomios en la variable t con coeficientes en K es una K -álgebra.

Ejemplo 1.1.2. Sea A una K -álgebra y $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $M_n(A)$ de todas las matrices cuadradas con coeficientes en A es una K -álgebra con la adición y multiplicación de matrices.

Definición 1.1.2. Un K -subespacio vectorial B de una K -álgebra A es una K -**subálgebra** de A si la identidad de A pertenece a B y $bb' \in B$ para todo $b, b' \in B$.

Cabe resaltar que un K -subespacio vectorial I de una K -álgebra A es un **ideal derecho** de A (ó **ideal izquierdo** de A) si $xa \in I$ (ó $ax \in I$) para todo $x \in I$ y $a \in A$ y una K -álgebra es de dimensión finita si la dimensión $\dim_K A$ del K -espacio vectorial A es finita.

1.1.2. A -módulos

Definición 1.1.3. Sea A una K -álgebra. Un A -módulo derecho es una pareja (M, \cdot) , donde M es un K -espacio vectorial y

$$\begin{aligned} \cdot : M \times A &\rightarrow M \\ (m, a) &\rightarrow m \cdot a \end{aligned}$$

es una operación binaria para la cual se satisfacen las siguientes condiciones:

- $(x + y) \cdot a = xa + ya$;
- $x(a + b) = xa + xb$;
- $x(ab) = (xa)b$;
- $x1 = x$;
- $(x\lambda)a = x(a\lambda) = (xa\lambda)$.

para todo $x, y \in M$, $a, b \in A$ y $\lambda \in K$.

Un A -módulo M se dice de dimensión finita si la dimensión $\dim_K M$ del K -espacio vectorial correspondiente es finita. Un K -subespacio M' de un A -módulo a derecha M es llamado un A -submódulo de M si $ma \in M'$ para todo $m \in M'$ y para todo $a \in A$. Un A -módulo M es **indescomponible** si M es distinto de cero y M no tiene descomposición en suma directa $M = S \oplus T$, donde S y T son A -módulos distintos de cero.

La categoría de todos los A -módulos se notará por $\text{Mod } A$; cabe recordar que se tiene una **Categoría** [12] \mathcal{R} si se define

- Una clase $\text{Ob } \mathcal{R}$, cuyos elementos serán llamados **objetos** de la categoría \mathcal{R} .
- Un conjunto $\text{Mor } \mathcal{R}$, cuyos elementos son llamados **Morfismos** de la categoría \mathcal{R} .
- Para cada morfismo $f \in \text{Mor } \mathcal{R}$ existe un par ordenado de objetos (A, B) de la categoría \mathcal{R} (Es decir que $f : A \rightarrow B$). El conjunto de todos los morfismo de A a B se denotará por $\text{Hom}(A, B)$.

- Para cada tripla ordenada $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{R}$ y para cualquier par de morfismos $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ existe un único morfismo $gf : A \rightarrow C$ que es llamado la **composición** o **producto** de los morfismos f y g .

Los objetos, los morfismos y la composición deben satisfacer las siguientes condiciones

- La composición de morfismos es asociativa, es decir, para cualquier tripla de morfismo f, g, h se tiene que

$$h(gf) = (hg)f$$

Siempre que estos productos están definidos,

- Si $A \neq A'$ o $B \neq B'$, entonces $\text{Hom}(A, B)$ y $\text{Hom}(A', B')$ son conjuntos disjuntos.
- Para cualquier $A \in \text{Ob } \mathcal{R}$ existe un morfismo $1_A \in \text{Hom}(A, A)$ tal que $f \cdot 1_A = f$ y $1_A \cdot g = g$ para cualquier morfismos $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow A$.

El morfismo 1_A tiene la propiedad de ser único y es llamado el **morfismo identidad** del objeto A .

La categoría de los A -módulos finitamente generados se denotará por $\text{mod } A$. Además los A -módulos que se utilizarán para el desarrollo de posteriores secciones son los que se presentan a continuación:

- Un A -módulo S es **simple** si no posee submódulos no triviales. Un A -módulo M es **semi-simple** si M es suma directa de módulos simples.
- Un A -módulo P es **proyectivo** si para cualquier epimorfismo $h : M \rightarrow N$ y cualquier $f \in \text{Hom}_A(P, N)$, existe un $f' \in \text{Hom}_A(P, M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & f' \swarrow & \downarrow f & \searrow & \\ M & \xrightarrow{h} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- Un A -módulo I es **inyectivo** si para todo monomorfismo $u : L \rightarrow M$ y cualquier $g \in \text{Hom}_A(L, I)$, existe un $g' \in \text{Hom}_A(M, I)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M \\ & & \downarrow g & \swarrow g' & \\ & & E & & \end{array}$$

Definición 1.1.4. Sea M un A -módulo a derecha, el **radical** ($\text{rad } M$) de M es la intersección de todos los submódulos maximales de M . El A -submódulo **Zócalo** ($\text{soc } M$) de M está generado por todos los A -submódulos simples de M y el A -módulo $\text{top } M = M/\text{rad } M$ es llamado el **top** de M .

Definición 1.1.5. Sea A un K -álgebra y $A \cong P_1^{r_1} \oplus P_2^{r_2} \oplus \cdots \oplus P_t^{r_t}$ la descomposición de A en A -módulos indescomponibles donde $P_i \not\cong P_j$ si $i \neq j$. En el caso que $r_i = 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, t$ se dice que A es **básica**.

Definición 1.1.6. Sea A una K -álgebra básica indescomponible de dimensión finita y sea $A \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_t$ la descomposición de A en A -módulos indescomponibles. En particular,

$$1 = \sum_{i=1}^t e_i,$$

con $e_i \in P_i$. Los elementos e_1, \dots, e_t tienen las siguientes propiedades:

- (a) Para cada i , e_i es un idempotente, esto es, $e_i^2 = e_i$.
- (b) $\{e_1, \dots, e_t\}$ es un conjunto ortogonal, esto es, $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$.
- (c) Para cada i , e_i es primitivo, es decir, si $e_i = e' + e''$ donde e' y e'' son idempotentes ortogonales, entonces $e' = 0$ ó $e'' = 0$.

Un conjunto $\{e_1, \dots, e_t\} \subset A$ con las propiedades descritas anteriormente se denomina un **sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales** de A , y en este caso

$$A = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_t,$$

donde t indica el número de proyectivos indescomponibles.

Definición 1.1.7. Una K -álgebra A es **hereditaria** si todo A -submódulo de un A -módulo proyectivo es proyectivo.

1.2. Representaciones de un Carcaj

En esta sección se presentará la definición de un carcaj, la categoría de representaciones de un carcaj y el álgebra de caminos asociada al carcaj y algunos resultados necesarios para los objetivos de este trabajo.

1.2.1. Carcaj

Definición 1.2.1 (Carcaj). Un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es una cuádrupla que consiste de dos conjuntos Q_0 (los elementos son llamados puntos o vértices) y Q_1 (los elementos son llamados flechas) y dos aplicaciones $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ que asocia a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su vértice de inicio $s(\alpha) \in Q_0$ y su vértice de llegada $t(\alpha) \in Q_0$ respectivamente.

Por convención Q se nota $Q = (Q_0, Q_1)$. Un carcaj es **finito** si Q_0 y Q_1 son finitos. El grafo subyacente \bar{Q} de un carcaj Q se obtiene tomando a Q y olvidando las orientaciones de cada flecha de Q_1 . El carcaj Q es **conexo** si \bar{Q} es un grafo conexo [9].

Definición 1.2.2. Sea Q un carcaj y $a, b \in Q$. Una trayectoria de longitud $l \geq 1$ con vértice de inicio a y vértice de llegada b es una sucesión

$$\rho = (a|\alpha_1, \dots, \alpha_l|b)$$

con $\alpha_j \in Q_1$, $1 \leq j \leq l$ tal que $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ $1 \leq k \leq l-1$ y finaliza en $t(\alpha_l) = b$.

Se denota por Q_l al conjunto de todas las trayectorias en Q de longitud l . Además se asocia a cada punto $a \in Q_0$ una trayectoria de longitud $l = 0$ llamada trayectoria estacionaria o trivial de a denotada $\epsilon_a = (a||a)$. Un camino de longitud $l \geq 1$ es un **ciclo** si el vértice de llegada coincide con el vértice de salida, además un ciclo de longitud 1 es un **bucle**. Un carcaj Q es acíclico si no contiene ciclos.

Ejemplo 1.2.1. Sea $Q_a = (Q_0, Q_1)$ un carcaj donde $Q_0 = \{1, 2, 3\}$ y $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$ con $s_a(\alpha) = 3$, $s_a(\beta) = 1$, $t_a(\alpha) = 2 = t_a(\beta)$.

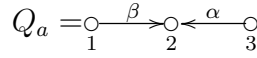


Figura 1.2.1

1.2.2. Álgebra de Caminos

Definición 1.2.3. Dado un carcaj Q se llama K -álgebra de caminos de Q y se denota por KQ al K -espacio vectorial que tiene como base el conjunto de todas las trayectorias $(a|\alpha_1, \dots, \alpha_l|b)$ de longitud $l \geq 0$ en Q y el producto de dos elementos de la base $(a|\alpha_1, \dots, \alpha_l|b)$ y $(c|\beta_1, \dots, \beta_k|d)$ de KQ está definido por

$$(a|\alpha_1, \dots, \alpha_l|b)(c|\beta_1, \dots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_k|d),$$

donde δ_{bc} denota la función delta de Kronecker. En otras palabras, el producto de dos trayectorias $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ y β_1, \dots, β_k es igual a cero si $t(\alpha_l) \neq s(\beta_1)$ y es igual a la concatenación $\alpha_1, \dots, \alpha_l\beta_1, \dots, \beta_k$ si $t(\alpha_l) = s(\beta_1)$. El producto de elementos de la base se extiende a elementos arbitrarios de KQ usando la propiedad distributiva.

Es decir, existe una descomposición:

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \dots \oplus KQ_l \oplus \dots$$

del K -espacio vectorial KQ , donde, para cada $l \geq 0$, KQ_l es el subespacio de KQ generado por el conjunto Q_l de todas las trayectorias de longitud l .

Proposición 1.2.1. Sea Q un carcaj y KQ su álgebra de caminos, entonces:

(a) KQ es un álgebra asociativa,

(b) KQ tiene un elemento identidad si y solo si Q_0 es finito, y

(c) KQ es de dimensión finita si y solo si Q es finito y acíclico.

Proposición 1.2.2. Sea Q un carcaj finito. El álgebra de caminos KQ es conexa si y solo si Q es un carcaj conexo.

Proposición 1.2.3. Sea Q un carcaj conexo, finito, y acíclico con $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ tal que, para cada $i, j \in Q_0$, $j \leq i$ cuando exista una trayectoria de i a j en Q . Entonces el álgebra de caminos KQ es isomorfa al álgebra matricial

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon_1(KQ)\epsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \epsilon_2(KQ)\epsilon_1 & \epsilon_2(KQ)\epsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \epsilon_n(KQ)\epsilon_1 & \epsilon_n(KQ)\epsilon_2 & \dots & \epsilon_n(KQ)\epsilon_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.2.2. Sea Q el carcaj

$$Q = \begin{array}{c} \circ \xleftarrow{\beta} \circ \xleftarrow{\alpha} \circ \\ 1 \qquad 2 \qquad 3 \end{array}$$

Figura 1.2.2.

KQ tiene como base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \alpha, \beta, \beta\alpha\}$ y $KQ_1 \cong \mathbb{T}_3(K)$, donde $\mathbb{T}_3(K)$ es el álgebra matricial cuyos elementos tienen la forma,

$$\mathbb{T}_3(K) \cong \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix}$$

Definición 1.2.4. Sea Q un carcaj finito y R_Q el ideal de KQ generado por las flechas de Q . Un ideal \mathcal{I} de KQ es admisible si existe un $m \geq 2$ tal que

$$R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2$$

Si \mathcal{I} es un ideal admisible de KQ , el par (Q, \mathcal{I}) es llamado un carcaj acotado.

Definición 1.2.5. Sea Q un carcaj. Una relación en Q con coeficientes en K es una combinación K -lineal de caminos de al menos longitud dos que tiene el mismo origen y final. Así, una relación ρ es un elemento de KQ tal que

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$$

donde los λ_i son escalares (no todos ceros) y los w_i son caminos en Q de longitud de al menos dos tal que, si $i \neq j$, entonces el inicio (o el final, respectivamente) de w_i coincide con el de w_j .

Proposición 1.2.4. Sea Q un carcaj finito y \mathcal{I} un ideal admisible de KQ , entonces existe un conjunto finito de relaciones $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ tal que $\mathcal{I} = \langle \rho_1, \dots, \rho_m \rangle$.

1.2.3. Representación de un Carcaj

Definición 1.2.6. Sea Q un carcaj finito. Una representación K –lineal M de Q se define de la siguiente manera:

1. A cada punto $a \in Q_0$ se le asocia un K –espacio vectorial M_a .
2. A cada camino $\alpha : a \rightarrow b$ en Q_1 se le asocia una transformación K –lineal $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$.

La representación se notará por $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ o simplemente por $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. Si $\dim_K M_a < \infty$ para $a \in Q_0$ entonces se dirá que la representación es finita.

Sea $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q . Un morfismo (de representaciones) $f : M \rightarrow M'$ es una familia $f = f(a)_{a \in Q_0}$ de transformaciones K –lineales $(f_a : M_a \rightarrow M'_a)_{a \in Q_0}$, talque para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$, se tiene $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$ o, equivalentemente, que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_b \\ \downarrow f_a & & \downarrow f_b \\ M'_a & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_b \end{array}$$

Sea Q un carcaj y $a, b \in Q_0$, a es sumidero si $s(\alpha) \neq a$ para cualquier $\alpha \in Q_1$, b es fuente si $t(\alpha) \neq b$ para cualquier $\alpha \in Q_1$.

Proposición 1.2.5. Sea $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ una representación de un (Q, \mathcal{I})

- (a) M es semisimple si y solo si $\varphi_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in Q_1$.
- (b) $\text{Soc } M = N$, donde $N = (N_a, \psi_\alpha)$ con $N_a = M_a$ si a es un sumidero mientras

$$N_a = \bigcap_{\alpha: a \rightarrow b} \text{Ker}(\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b)$$

si a no es sumidero y $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{N_a}$ para cada flecha α de fuente a .

- (c) $\text{rad } M = J$, donde $J = (J_a, \gamma_\alpha)$ con $J_a = \sum_{\alpha: b \rightarrow a} \text{Im}(\varphi_\alpha : M_b \rightarrow M_a)$ y $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a}$ para cada flecha α de fuente a .

- (d) $\text{top } M = L$, donde $L = (L_a, \psi_\alpha)$ con $L_a = M_a$ si a es una fuente, mientras $L_a = \sum_{\alpha: b \rightarrow a} \text{Coker}(\varphi_\alpha : M_b \rightarrow M_a)$ si a no es una fuente y $\psi_\alpha = 0$ para cada flecha α de fuente a .

Si se considera como objetos las representaciones de Q y los morfismos anteriormente descritos se puede definir la categoría $\text{Rep}_K(Q)$ de representaciones K –lineales de Q . Además se denotará por $\text{rep}(Q)$ la subcategoría de $\text{Rep}_K(Q)$ que consiste en las representaciones de dimensión finita.

Proposición 1.2.6. Sea Q un carcaj finito. Entonces $\text{Rep}_K(Q)$ y $\text{rep}_K(Q)$ son categorías abelianas.

Cabe recordar que se dice que \mathcal{R} es una **categoría aditiva**, si $U \oplus V$ existe para cada par de objetos $U, V \in \mathcal{R}$ y contiene un objeto nulo o inicial 0 , tal que $1_0 = 0$ [5].

Definición 1.2.7. Una representación $M \in \text{Rep}_K(Q)$ es **descomponible** si $M = M' \oplus M''$ con M' y $M'' \neq 0$ y no isomorfas a M , de otra manera diremos que M es **indescomponible**.

Definición 1.2.8. Sea M una representación finita de un carcaj Q con $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$. En este caso el **vector dimensión** de la representación M , se define como:

$$\dim M = (\dim M_a)_{a \in Q_0}$$

Definición 1.2.9. Un carcaj Q se dice de tipo representación finito, si existe un número finito de clases de isoformismos de representaciones indescomponibles de Q , en caso contrario se denomina de tipo infinito.

A continuación se presentan los diagramas Dynkin $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$.

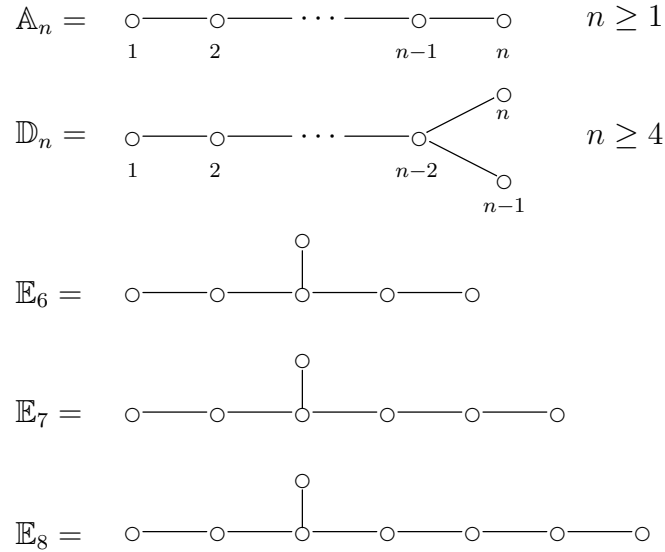


Figura 1.2.3

Teorema 1.2.1. Sea Q un carcaj finito, conexo, y acíclico, K un campo algebraicamente cerrado; y $A = KQ$ la K -álgebra de caminos de Q . El álgebra A es de representación finito si y solo si el grafo subyacente \bar{Q} de Q es un diagrama de Dynkin de la forma $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$. [18].

Proposición 1.2.7. Sea Q un carcaj finito, conexo, acíclico. Entonces existe una equivalencia categórica $\text{Mod } KQ \cong \text{Rep}_K(Q)$ y $\text{mod } KQ \cong \text{rep}_K(Q)$.

1.3. Teoría de Auslander-Reiten

En esta sección se presentará las sucesiones que casi escinden, la construcción del carcaj de Auslander-Reiten y la relación que existe con el carcaj de traslación de un álgebra A .

1.3.1. Sucesiones que Casi Escinden

Definición 1.3.1. Sea $h : M \longrightarrow N$ y $u : L \longrightarrow M$ homomorfismo de A -módulos a derecha (izquierda), un homomorfismo $s : N \longrightarrow M$ es una **sección** de h si $hs = 1_N$ y un homomorfismo $r : M \longrightarrow L$ es una **retracción** de u si $ru = 1_L$.

Si s es una sección de h , entonces h es sobreyectivo, s es inyectivo, hay una suma directa de descomposición $M = \text{Im } s \oplus \text{Ker } h = N \oplus \text{Ker } h$ y h es una retracción de s . De manera similar si r es una retracción de u , entonces r es sobreyectivo, u es inyectivo, u es una sección de r y hay una suma directa de descomposición $M = \text{Im } u \oplus \text{Ker } r = L \oplus \text{Ker } r$.

Una sucesión

$$\cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} X_n \xrightarrow{h_n} X_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} X_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

infinita o finita de A -módulos a derecha (izquierda) de homomorfismos es llamada exacta si $\text{Ker } h_n = \text{Im } h_{n-1}$ para cualquier n . En particular

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{r} N \longrightarrow 0$$

es llamada una **sucesión exacta corta** si u es un monomorfismo, r es un epimorfismo y $\text{Ker } r = \text{Im } u$. Note que el homomorfismo u admite una retracción $p : M \longrightarrow L$ si y solo si r admite una sección $v : N \longrightarrow M$. En este caso existen descomposiciones de sumas directas $M = \text{Im } u \oplus \text{Ker } p = \text{Im } v \oplus \text{Ker } r$ de M y se dirá que la sucesión exacta corta escinde.

Definición 1.3.2. Sea L, M, N módulos en $\text{mod } A$

- (a) Un homomorfismo $f : L \longrightarrow M$ es llamado **minimal a izquierda** si para cada $h \in \text{mod } M$ tal que $hf = f$ es un automorfismo.
- (b) Un homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ es llamado **minimal a derecha** si para cada $k \in \text{mod } M$ tal que $gk = g$ es un automorfismo.
- (c) Un homomorfismo $f : L \longrightarrow M$ es llamado **casi escindente** a izquierda si
 - (I) f no es sección y
 - (II) para cada A -homomorfismo $u : L \longrightarrow U$ que no es una sección existe $u' : M \longrightarrow U$ tal que $u'f = u$, esto es, u' hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow u & \nearrow u' & \\ U & & \end{array}$$

(d) Un A –homomorfismo $g : M \longrightarrow N$ es llamado casi escindente a derecha si

(I) g no es retracción y

(II) para cada A –homomorfismo $v : V \longrightarrow N$ que no es una retracción existe $v' : V \longrightarrow M$ tal que $gv' = v$, esto es, v' hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ v' \swarrow & & \searrow v \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

(e) Un homomorfismo $g : L \rightarrow M$ es llamado una casi escindente minimal a izquierda si es minimal a izquierda y es casi escindente a izquierda.

(f) Un homomorfismo $g : M \rightarrow N$ es llamado una casi escindente minimal a derecha si es minimal a derecha y es casi escindente a derecha.

Proposición 1.3.1. (a) Si los homomorfismos $f : L \longrightarrow M$ y $f' : L \longrightarrow M'$ son casi escindentes minimales a izquierda, entonces existe un isomorfismo $h : M \longrightarrow M'$ tal que $f' = hf$.

(b) Si los homomorfismos $g : M \longrightarrow N$ y $g' : M' \longrightarrow N$ son casi escindentes minimales a derecha, entonces existe un isomorfismo $k : M \longrightarrow M'$ tal que $g = g'k$.

Ahora se puede observar que los morfismos que casi escinde están relacionados con los módulos indescomponibles.

Proposición 1.3.2. (a) Si $f : L \longrightarrow M$ es un morfismo a izquierda que casi escinde en mod A , entonces el módulo L es indescomponible.

(b) Si $g : M \longrightarrow N$ es un morfismo a derecha que casi escinde en mod A , entonces el módulo N es indescomponible.

Definición 1.3.3. un homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ en mod A es **irreducible** si

(a) f no es sección ni retracción y

(b) si $f = f_1 f_2$ entonces f_1 es una retracción o f_2 es una sección.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow f_2 & \nearrow f_1 \\ & Z & \end{array}$$

El siguiente lema muestra que el espacio cociente $\text{rad}_A(X, Y)/\text{rad}_A^2(X, Y)$ mide el número de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles X y Y .

Proposición 1.3.3. *Sea X, Y módulos indescomponibles en $\text{mod } A$. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es irreducible si y solo si $f \in \text{rad}_A(X, Y) / \text{rad}_A^2(X, Y)$.*

Ahora se define un tipo particular de sucesión exacta corta, que es particularmente útil en la teoría de representación de álgebras.

Definición 1.3.4. Una sucesión exacta corta en $\text{mod } A$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es llamada una **sucesión que casi escinde** si

- (a) f es casi escindente minimal a izquierda y
- (b) g es casi escindente minimal a derecha

A continuación se presentan varias características equivalentes de las sucesiones que casi escinden.

Teorema 1.3.1. *Sea $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta en $\text{mod } A$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *la sucesión dada es casi escindente.*
2. *L es indescomponible, y g es casi escindente a derecha.*
3. *N es indescomponible, y f es casi escindente a izquierda.*
4. *El homomorfismo f es casi escindente minimal a izquierda.*
5. *El homomorfismo g es casi escindente minimal a derecha.*
6. *L y N son indescomponibles, f y g son irreducibles.*

1.3.2. Carcaj de Auslander-Reiten y Carcaj de Traslación

Se presenta una definición importante para el desarrollo de posteriores capítulos.

Definición 1.3.5. Sea A una K -álgebra básica, conexa y de dimensión finita. El carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$ de $\text{mod } A$ se define como sigue:

1. Los puntos de $\Gamma(\text{mod } A)$ son las clases de isomorfía $[X]$ de módulos indescomponibles X en $\text{mod } A$.
2. Sea $[M], [N]$ dos puntos en $\Gamma(\text{mod } A)$ correspondiente a módulos indescomponibles M, N en $\text{mod } A$. La flecha $[M] \rightarrow [N]$ está en correspondencia biyectiva con los vectores de la base del K -espacio vectorial de $\text{Irr}(M, N)$ (Morfismos irreducibles de M en N).

El carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$ de la categoría de módulos $\text{mod } A$ es llamado el Carcaj de **Auslander-Reiten** de A .

Ejemplo 1.3.1. Sea A una K -álgebra de caminos del carcaj lineal de la figura 1.2.2 [18]; la lista completa de proyectivos e inyectivos indescomponibles están dadas por

$$P(1) = (K \longleftarrow 0 \longleftarrow 0) = S(1)$$

$$P(2) = (K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0)$$

$$P(3) = (K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K) = I(1)$$

$$I(2) = (0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K)$$

$$I(3) = (0 \longleftarrow 0 \longleftarrow K)$$

note que el módulo simple $S(2)$ no es inyectivo ni proyectivo. Por otro lado

$$P(1) = \text{rad } P(2)$$

$$P(2) = \text{rad } P(3)$$

$$I(3) = I(2)/S(2)$$

$$I(2) = I(3)/S(1)$$

El A -módulo $P(1)$ es simple proyectivo y no inyectivo. Como $P(1) = \text{rad } P(2)$ no es un sumando de $\text{rad } P(3)$, la inclusión $i : P(1) \rightarrow P(2)$ es el único morfismo irreducible y exactamente un único morfismo minimal a derecha que casi escinde que termina en $P(2)$. Además se tiene una sucesión que casi escinde

$$0 \longrightarrow P(1) \xrightarrow{i} P(2) \longrightarrow \text{Coker } i \longrightarrow 0$$

con el $\text{Coker } i = P(2)/P(1) = S(2)$. Al considerar $P(2)$, de $P(2) \rightarrow P(3)$ existe un morfismo irreducible; por otro lado como $\text{rad } P(3) = P(2)$, existe un morfismo irreducible (inclusión) $P(2) \rightarrow P(3)$. $P(3) = I(1)$ es un proyectivo e inyectivo entonces existe una sucesión que casi escinde de la forma

$$0 \longrightarrow P(2) \xrightarrow{i} P(3) \oplus S(2) \longrightarrow I(2) \longrightarrow 0$$

Por otro lado, el homomorfismo $I(2) \rightarrow I(2)/S(3) = I(3) = S(3)$ es casi escindido minimal a izquierda, con kernel $S(2)$, por lo que se tiene una sucesión que casi escinde

$$0 \longrightarrow S(2) \xrightarrow{i} I(2) \longrightarrow S(3) \longrightarrow 0$$

Con esta información se obtiene $\Gamma(\text{mod } A)$ es el siguiente carcaj

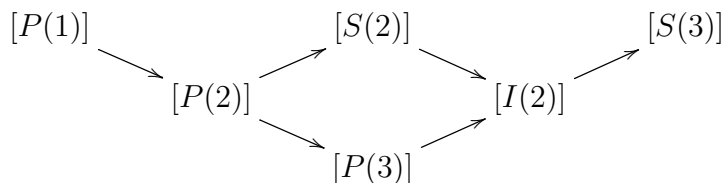


Figura 1.3.1

Se puede sustituir cada módulo indescomponible por su vector dimensión, como en los siguientes casos.

Ejemplo 1.3.2. Sea A la K -álgebra representada por el siguiente carcaj

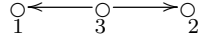


Figura 1.3.2

el carcaj de Auslander-Reiten asociado al álgebra es

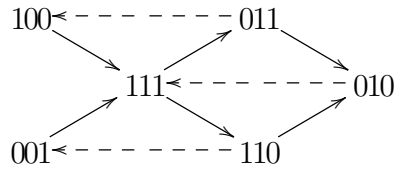


Figura 1.3.3

Ejemplo 1.3.3. Sea B una K -álgebra representada por el siguiente carcaj

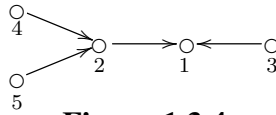


Figura 1.3.4

El carcaj de Auslander-Reiten asociado es

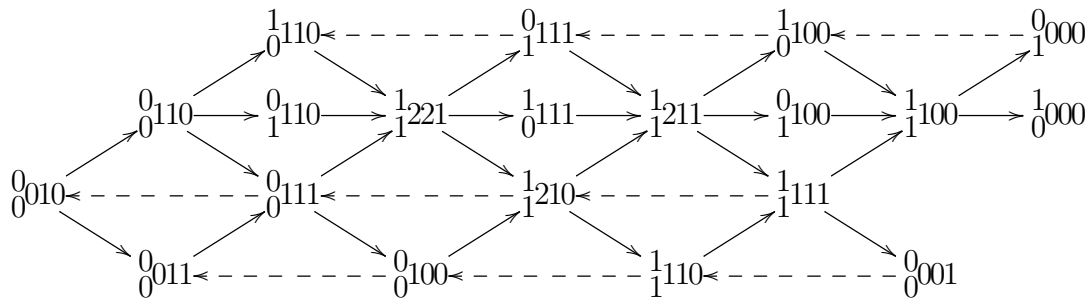


Figura 1.3.5

A continuación se presenta la definición del carcaj de traslación asociada a un álgebra.

Definición 1.3.6. Sea $\Sigma = (\Sigma_0, \Sigma_1)$ un carcaj acíclico y conexo. Un carcaj de traslación infinito $(\mathbb{Z}\Sigma, \tau)$ es el conjunto $(\mathbb{Z}\Sigma)_0 = \mathbb{Z} \times \Sigma_0 = \{(n, x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in \Sigma_0\}$ de vértices, y para cada flecha $\alpha : x \rightarrow y \in \Sigma_1$ existen 2 flechas

$$(n, \alpha) : (n, x) \rightarrow (n, y) \quad (n, \alpha') : (n+1, y) \rightarrow (n, x) \in (\mathbb{Z}\Sigma)_1$$

La traslación τ sobre $\mathbb{Z}\Sigma$ está dada por $\tau(n, x) = (n+1, x)$ para todo $(n, x) \in (\mathbb{Z}\Sigma)_0$, además para cada $(n, x) \in (\mathbb{Z}\Sigma)_0$ se define una biyección entre el conjunto de flechas de (n, x) y el conjunto de flechas de $(n+1, x)$ por las siguientes formulas:

$$\sigma(n, \alpha) = (n, \alpha') \text{ y } \alpha(n, \alpha') = (n+1, \alpha)$$

Ejemplo 1.3.4. Sea Σ el carcaj [18]

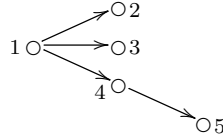


Figura 1.3.6

entonces $\mathbb{Z}\Sigma$ es el carcaj de traslación

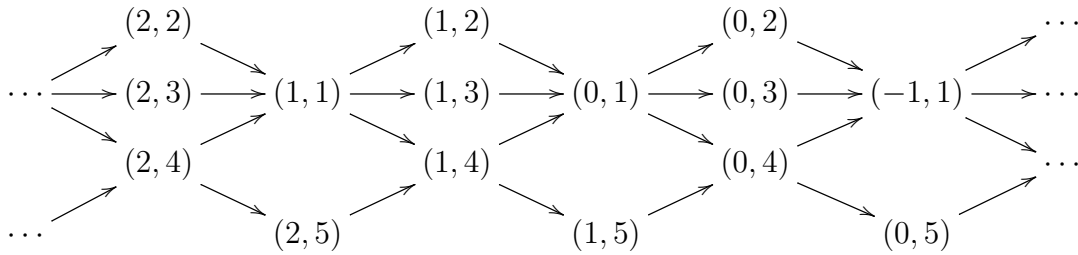


Figura 1.3.7

En particular si A es un álgebra hereditaria conexa, el carcaj de traslación coincide con el carcaj de Auslander- Reiten.

Definición 1.3.7. Sea (Γ, τ) un carcaj de traslación conexo. Un subcarcaj conexo completo Σ de Γ es una *sección* de Γ si satisface las siguientes condiciones

S(1) Σ es acíclico.

S(2) Para cada $x \in \Gamma_0$, existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^n x \in \Sigma_0$.

S(3) Si $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_t$ es un camino en Γ con $x_0, x_t \in \Sigma_0$, entonces $x_i \in \Sigma_0$ para todo i tal que $0 \leq i \leq t$.

Para un carcaj de traslación (Γ, τ) , la τ -órbita de un punto $x \in \Gamma_0$ se define como el conjunto de todos los puntos de la forma $\tau^n x$ con $n \in \mathbb{Z}$. Además, cualquier sección Σ tiene exactamente un elemento de τ -órbita asociada a x .

Ejemplo 1.3.5. Sea A el álgebra de la figura 1.3.3 entonces

$$\{100, 111, 001\}, \{011, 111, 110\}, \{100, 111, 110\}, \\ \{011, 111, 001\} \text{ y } \{011, 010, 110\}$$

son secciones de $\Gamma(\text{Mod } A)$.

1.4. Conjuntos Parcialmente Ordenados

En esta sección se presentarán los conjuntos parcialmente ordenados, su representación por medio de un diagrama de Hasse y se definirá la categoría de representaciones asociado a un poset.

1.4.1. Poset

Definición 1.4.1. Sea \mathcal{P} un conjunto y \leq una relación binaria de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, se define un **Conjunto Parcialmente Ordenado** o **Poset** al par (\mathcal{P}, \leq) tal que:

1. La relación \leq es reflexiva, es decir que para todo $x \in \mathcal{P}$, $x \leq x$.
2. La relación \leq es antisimétrica, es decir que para todo $x, y \in \mathcal{P}$ si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$.
3. La relación \leq es transitiva, es decir que para todo $x, y, z \in \mathcal{P}$ si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Ejemplo 1.4.1. El par (\mathbb{N}, \leq) con \mathbb{N} el conjunto de los números naturales y \leq la relación menor igual sobre los naturales es un Poset.

Ejemplo 1.4.2. Los pares (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{Q}, \leq) , (\mathbb{R}, \leq) con la relación de orden menor igual son Posets.

Ejemplo 1.4.3. Sea X un conjunto, se puede definir un Poset con el conjunto $P(X)$ (Partes del conjunto X) y la relación \subseteq (Contenencia).

Por notación cuando se refiere al Poset \mathcal{P} se estará incluyendo la relación de equivalencia.

Definición 1.4.2. Sea \mathcal{P} un Poset, si $x, y \in \mathcal{P}$, se dice que x y y son comparables si $x \leq y$ o $y \leq x$, en caso contrario se dice que x y y son incomparables.

Definición 1.4.3. Si (\mathcal{P}, \leq) es un poset finito, entonces podemos representarlo gráficamente con un sistema de círculos (representando los elementos de \mathcal{P}) y líneas conectándolos (indicando una relación entre los puntos). La construcción de esta representación gráfica cumple con las siguientes reglas :

- (a) A cada punto $x \in \mathcal{P}$, se le asocia un punto $p(x)$ del plano euclidiano \mathbb{R}^2 , representándolo con un pequeño círculo con centro en $p(x)$.
- (b) A cada relación $x < y$ en \mathcal{P} , para la cual no existe $t \in \mathcal{P}$ tal que $x < t < y$ se le asigna un segmento de recta $l(x, y)$, conectando el círculo con centro en $p(x)$ y el círculo con centro en $p(y)$.

(c) Los pasos (a), (b) se llevan a cabo de forma tal que:

- (1) Si $x < y$ y no existe $t \in \mathcal{P}$ tal que $x < t < y$ entonces $p(x)$ debe quedar por debajo de $p(y)$ (esto es, la segunda coordenada de $p(x)$ es estrictamente menor que la de $p(y)$).
- (2) El círculo con centro en $p(z)$ no intersecta el segmento de recta $l(x, y)$ si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Una configuración de círculos y líneas satisfaciendo (a)-(c) se llama un **diagrama de Hasse** de \mathcal{P} .

Ejemplo 1.4.4. Sea \mathcal{P} y \mathcal{Q} posets, sus diagramas de Hasse asociados son:

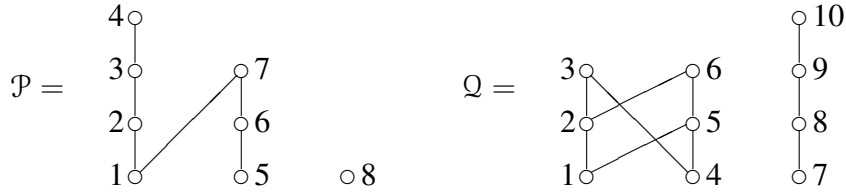


Figura 1.4.1

Definición 1.4.4. Un poset (\mathcal{C}, \leq) es una **cadena** o un conjunto linealmente ordenado si y solamente si para todo par de puntos $x, y \in \mathcal{C}$ se tiene $x \leq y$ o $y \leq x$, esto es, todos sus puntos son comparables. Un poset (\mathcal{P}, \leq) es una **anticadena** si y solamente si para todo par de puntos $x, y \in \mathcal{P}$ con $x \neq y$, se tiene que x es incomparable con y .

1.4.2. Representaciones de un Poset

Definición 1.4.5. Una representación V de un poset \mathcal{P} sobre un campo K es un sistema de la forma

$$V = (V_0; V_x \mid x \in \mathcal{P})$$

donde V_0 es un K -espacio vectorial de dimensión finita y para cada $x \in \mathcal{P}$, V_x es un subespacio vectorial de V_0 tal que $V_x \subseteq V_y$ si $x \leq y$.

Ejemplo 1.4.5. Sea \mathcal{P} un Poset descrito por el siguiente Diagrama de Hasse.

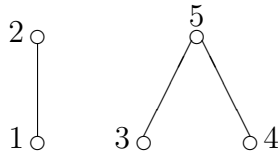


Figura 1.4.2

Una representación V de \mathcal{P} puede definirse de la siguiente manera

$$V_0 = K, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = K, \quad V_3 = 0, \quad V_4 = 0, \quad V_5 = K.$$

Donde K es un campo y $V = (K; 0, K, 0, 0, K)$.

Definición 1.4.6. Sea $V = (V_0; V_x \mid x \in \mathcal{P})$ y $W = (W_0; W_x \mid x \in \mathcal{P})$ un morfismo $f : V \rightarrow W$ es una transformación K -lineal de $V_0 \rightarrow W_0$ tal que $f(V_x) \subseteq W_x$ con $x \in \mathcal{P}$.

Definición 1.4.7. La suma directa de V y W es

$$V \oplus W = (V_0 \oplus W_0; V_x \oplus W_x \mid x \in \mathcal{P})$$

Comentario 1.4.1. La categoría de representaciones de un conjunto parcialmente ordenado donde los objetos son las representaciones y los morfismos anteriormente descritos entre ellas se denota por $\text{Rep}_K(\mathcal{P})$. $\text{Rep}_K(\mathcal{P})$ resulta ser una categoría aditiva.

Definición 1.4.8. Dada una representación U de \mathcal{P} , se define el vector dimensión como:

$$d = \dim U = (d_0; d_x \mid x \in \mathcal{P})$$

donde $d_0 = \dim U_0$ y $d_x = (\dim U_x / \text{rad } U_x)$ para cada $x \in \mathcal{P}$.

$$\text{rad } U_x = \sum_{y < x} U_y.$$

Ejemplo 1.4.6. Sea \mathcal{P} el **Poset** y V la representación de \mathcal{P} descritos en el ejemplo 1.4.2 con $K = \mathbb{R}$ entonces el vector dimensión es $(1; 0, 1, 0, 0, 1)$.

CAPÍTULO

2

ANTICADENAS

En 1897, Dedekind introdujo los números de Dedekind, denotado $D(n)$, los cuales en particular cuentan el número de funciones booleanas monótonas sobre n variables o el número de anticadenas en el conjunto de potencias 2^n ordenado por la inclusión. Actualmente solo se conocen nueve de estos números reconocidos en la OEIS como la sucesión A000372.

$$D(0) = 2$$

$$D(1) = 3$$

$$D(2) = 6$$

$$D(3) = 20$$

$$D(4) = 168$$

$$D(5) = 7,581$$

$$D(6) = 7,828,354$$

$$D(7) = 2,414,682,040,998$$

$$D(8) = 56,130,437,228,687,557,907,788.$$

En relación con el número de anticadenas en el poset $\mathcal{P}_n = (2^n, \subseteq)$ donde $n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, en este capítulo, se utilizará la representación de una estructura de una álgebra de caminos para encontrar una fórmula del número de anticadenas de dos elementos en este poset [1].

2.1. Un Álgebra de Caminos

Sea $\Gamma(n, n-1)$ el siguiente carcaj

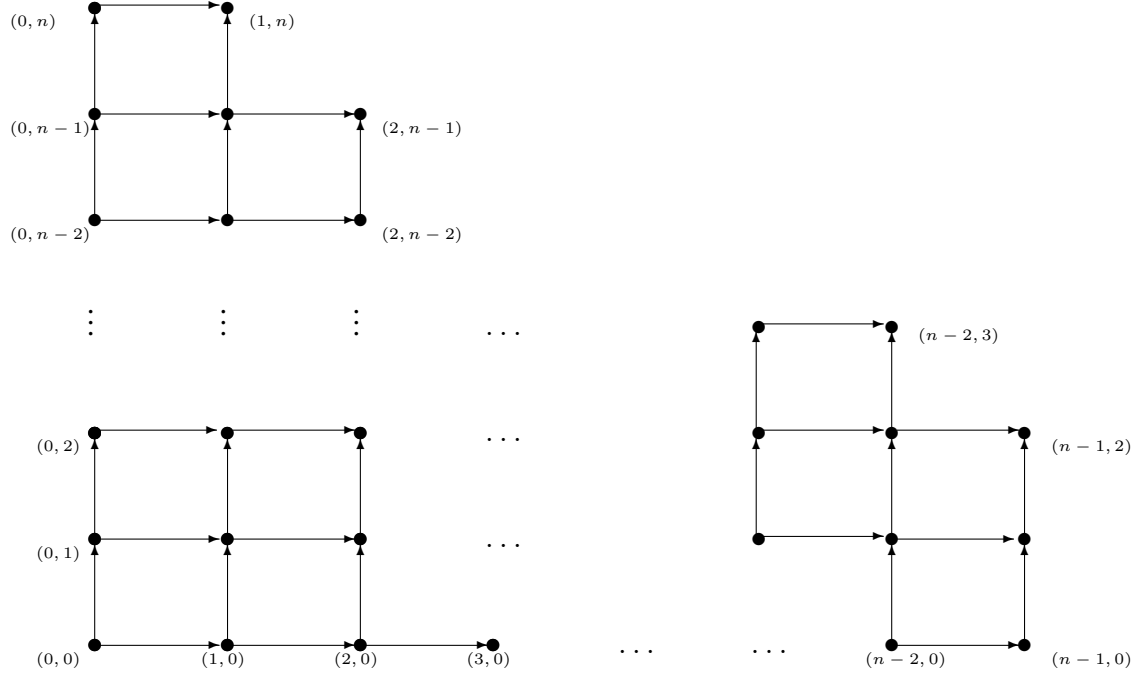


Figura 2.1.1

Sea T el conjunto de los vértices $T = \{(1, n), (2, n-1), \dots, (n-2, 3), (n-1, 2)\} \subseteq \Gamma(n, n-1)$ y para cada $2 \leq k \leq n-2$ se define ρ_k tal que:

$$\rho_k = P^k((0,0)(n-k+1, k)) - \bigcup_{j=0}^{k-2} P^{k_j}((0,0)(n-k+1, j)) \text{ y}$$

$$\rho_{n-1} = P^{n-1}((0,0), (1, n-1)) - \bigcup_{j=0}^{n-3} P^{(n-1)_j}((0,0), (i, j))$$

donde $P^h((0,0), (i, h))$ denota todos los caminos que empiezan en $(0,0)$ y terminan en (i, h) , $P^{k_j}((0,0), (i, h))$ $j < k$ denota el subconjunto de $P^k((0,0), (i, k))$ tales que empiezan en $(0,0)$ y pasan por (i, j) . Se define ρ_n por

$$\rho_n = \bigcup_{h=2}^{n-1} \rho_h$$

Ejemplo 2.1.1. Sea $\Gamma(4, 3)$

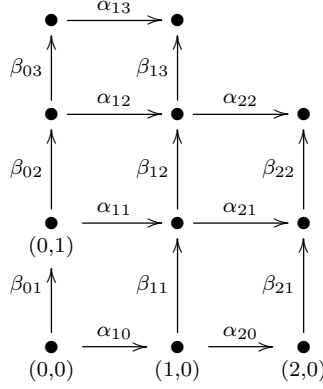


Figura 2.1.2

Sea $\rho_4 = \bigcup_{n=2}^3 \rho_n$; cuando $k = 2$ se tiene que

$$\rho_2 = P^2((0, 0), (2, 2)) - \bigcup_{j=0}^0 P^{2j}((0, 0), (2, j))$$

con

$$P^2((0, 0), (2, 2)) = \{\alpha_{22}\alpha_{12}\beta_{02}\beta_{01}, \alpha_{22}\beta_{12}\alpha_{11}\beta_{01}, \alpha_{22}\beta_{12}\beta_{11}\alpha_{10}, \beta_{22}\alpha_{21}\beta_{11}\alpha_{10}, \beta_{22}\alpha_{21}\alpha_{11}\beta_{01}, \beta_{22}\beta_{21}\alpha_{20}\alpha_{10}\}$$

y

$$\bigcup_{j=0}^0 P^{2j}((0, 0), (2, j)) = \{\beta_{22}\beta_{21}\alpha_{20}\alpha_{10}\}$$

cuando $k = 3$ se tiene que

$$\rho_3 = P^3((0, 0), (1, 3)) - \bigcup_{j=0}^1 P^{3j}((0, 0), (1, j))$$

con

$$P^3((0, 0), (1, 3)) = \{\alpha_{13}\alpha_{03}\beta_{02}\beta_{01}, \beta_{13}\alpha_{12}\beta_{02}\beta_{01}, \beta_{13}\beta_{12}\alpha_{11}\beta_{01}, \beta_{13}\beta_{12}\beta_{11}\alpha_{10}\}$$

y

$$\bigcup_{j=0}^1 P^{3j}((0, 0), (1, j)) = \{\beta_{13}\beta_{12}\alpha_{11}\beta_{01}, \beta_{13}\beta_{12}\beta_{11}\alpha_{10}\}$$

entonces ρ_4 consiste de las siguientes relaciones:

$$\alpha_{13}\beta_{03}\beta_{02}\beta_{01}, \beta_{13}\alpha_{12}\beta_{02}\beta_{01}, \alpha_{22}\alpha_{12}\beta_{02}\beta_{01}, \alpha_{22}\beta_{12}\alpha_{11}\beta_{01}, \alpha_{22}\beta_{12}\beta_{11}\alpha_{10}, \beta_{22}\alpha_{21}\alpha_{11}\beta_{01}, \beta_{22}\alpha_{21}\beta_{11}\alpha_{10}$$

los proyectivos indescomponibles del álgebra de caminos $K\Gamma_{(4,3)}/\langle \rho_4 \rangle$ son:

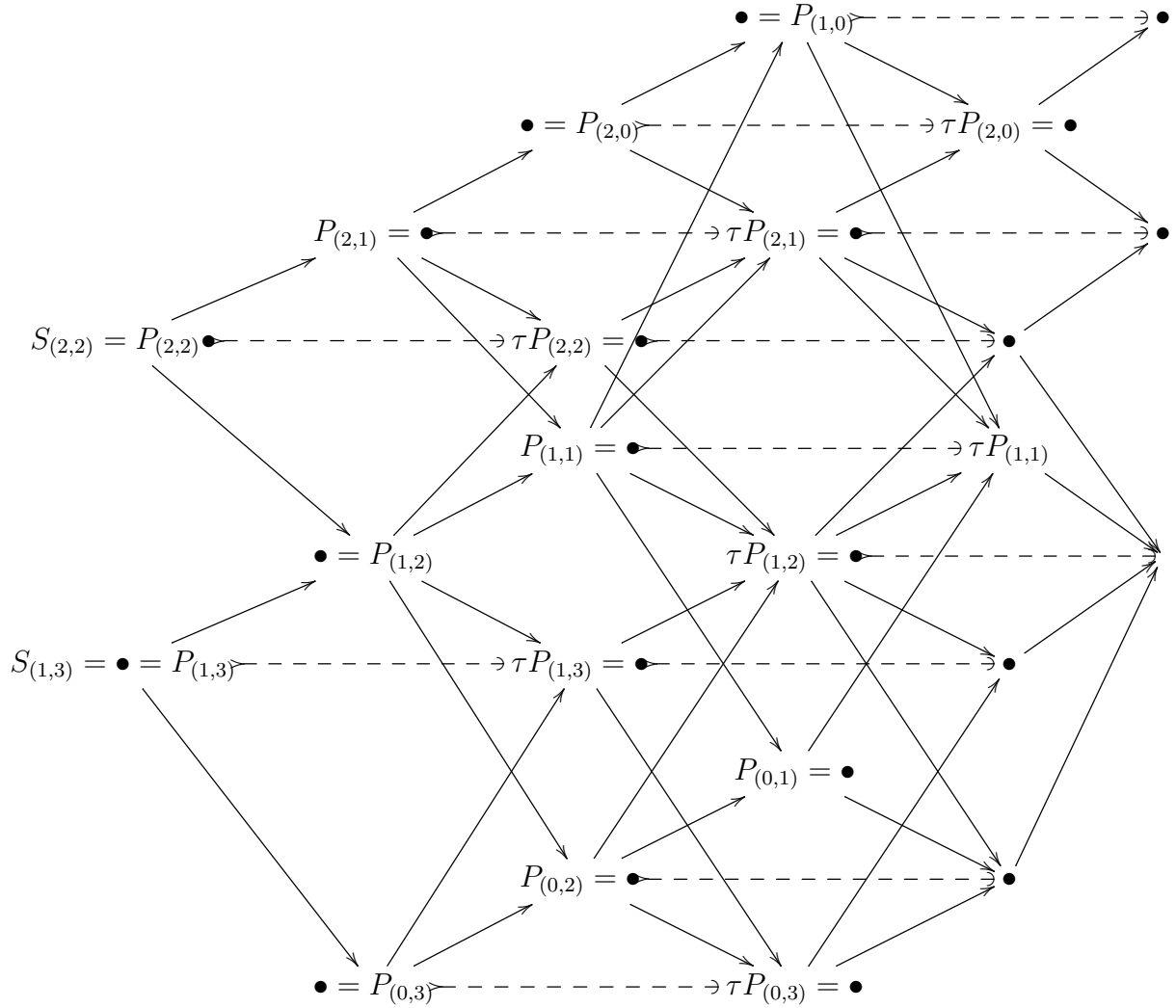
$$P_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_{(2,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{(0,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_{(0,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{(1,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación se presenta la componente preproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten de $\Gamma_{(4,3)}/\langle \rho_4 \rangle$.

**Figura 2.1.3**

Cabe resaltar, si K es un campo entonces para $n \geq 3$ fijo, el álgebra de caminos $K\Gamma(n, n-1)/\langle \rho_n \rangle$ es de tipo representación infinita.

Para $1 \leq r \leq n-3$ y $n \geq 4$ fijo, H_n^r denota el subconjunto de ρ_n tal que

$$H_n^r = \bigcup_{s=0}^{n-r-2} [P_{((0,0),(n-r-s-1,r+s+2))}^{r+s} - P_{((0,0),(n-r-s-1,s))}^{r+s}].$$

entonces:

$$|H_n^r| = h_n^r = \sum_{s=1}^{n-r-1} [c(s, n-s) + c(s, n-s-r-1)] \quad \text{si } r \geq 1$$

donde $c(s, n-s) = \binom{n}{s}$ para $n \geq 4$ fijo.

Proposición 2.1.1. Para $n \geq 4$ fijo $|\rho_n| = \sum_{r=1}^{n-3} h_n^r$.

Para $n \geq 3$ y $r \geq 1$, g_n^r denota la sucesión dada por la siguiente identidad

$$g_n^r = \begin{cases} 2^{n-1} - 1, & \text{if } r = 0 \\ h_n^r, & \text{if } r \geq 1 \\ t_{n-1} = \frac{(n-1)(n)}{2}, & \text{if } r = n - 1. \end{cases}$$

2.2. Sobre el Poset \mathcal{H}_k

Definición 2.2.1. Sea el poset (\mathbb{N}, \leq) con \leq la relación natural de orden, sea $(\mathcal{P}, \trianglelefteq)$ un poset con $|\mathcal{P}| = p$, un **etiquetamiento** w de \mathcal{P} es una biyección $w : \mathcal{P} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\} \subset \mathbb{N}$. w es llamado el etiquetamiento natural si satisface

$$x \trianglelefteq y \quad \text{entonces} \quad w(x) \leq w(y).$$

w es llamado etiquetamiento estricto si

$$x \trianglelefteq y \quad \text{entonces} \quad w(x) \geq w(y).$$

Un conjunto ordenado junto con un etiquetamiento w es llamado conjunto ordenado etiquetado.

Ahora se toma el poset etiquetado \mathcal{H}_k descrito por el siguiente diagrama de Hasse

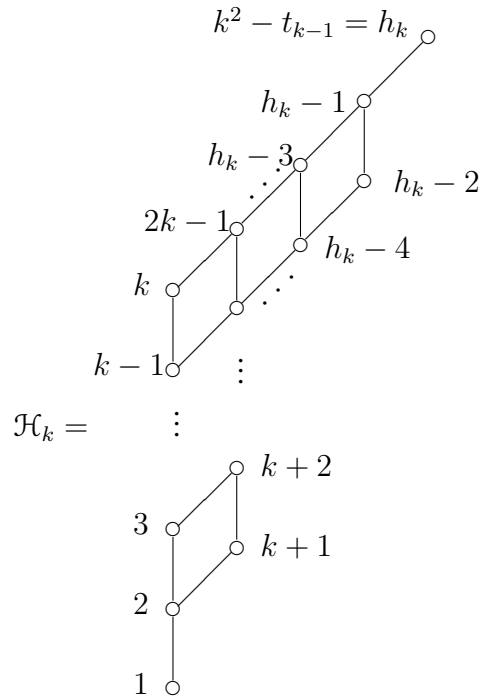


Figura 2.2.1

y se define un algoritmo de diferenciación (functor aditivo $D : \text{rep } \mathcal{P} \rightarrow \text{rep } \mathcal{P}', U \rightarrow D(U) = U'$)

sobre \mathcal{H}_k tal que el *poset derivado* \mathcal{H}'_k del poset \mathcal{H}_k está definido por la siguiente identidad:

$$\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k \setminus \text{Min } \mathcal{H}_k \cup \{k^2 - t_k\}.$$

donde $\text{Min } \mathcal{P}$ denota el conjunto de puntos minimales de \mathcal{P} . Cabe recordar que un **Funtor**[5] entre las categorías \mathcal{R} y \mathcal{R}' es una aplicación $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$, talque

- Para cada $A \in \mathcal{R}$, se le asigna un objeto $F(A) \in \mathcal{R}'$.
- Para cada morfismo $g \in \text{Hom}(A, B)$, se le asigna un morfismo $F(g) \in \text{Hom}(F(A), F(B))$.

De tal manera que

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$, para cada objeto $A \in \mathcal{R}$.
- $F(gf) = F(g)F(f)$, para todo $f \in \text{Hom}(A, B)$ y $g \in \text{Hom}(B, C)$.

además la aplicación de conjuntos

$$F(A, B) : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(F(A), F(B))$$

dada por $F(A, B)(g) = F(g)$ es **fiel** si la aplicación es inyectiva, **pleno** si la aplicación es sobreyectiva y **denso** si para cada objeto $A' \in \mathcal{R}'$ existe un objeto $A \in \mathcal{R}$ tal que $A' \simeq F(A)$.

Definición 2.2.2. Para $0 \leq i \leq n - k$ y $n > 3$ fijo. La *órbita* \mathcal{O}_k^i de \mathcal{H}_k es una sucesión de la forma:

$$\mathcal{O}_k^i = (\mathcal{H}_k^{(i)}, \mathcal{H}_k^{(i+1)}, \dots, \mathcal{H}_k^{(n-k-1)}).$$

donde $\mathcal{H}_k^{(0)} = \mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k^{(1)} = \mathcal{H}'_k$, y $(\mathcal{H}_k^{(s-1)})' = \mathcal{H}_k^s$.

Ejemplo 2.2.1. Sea el poset \mathcal{H}_3^0 , los siguientes diagramas de Hasse representan una órbita

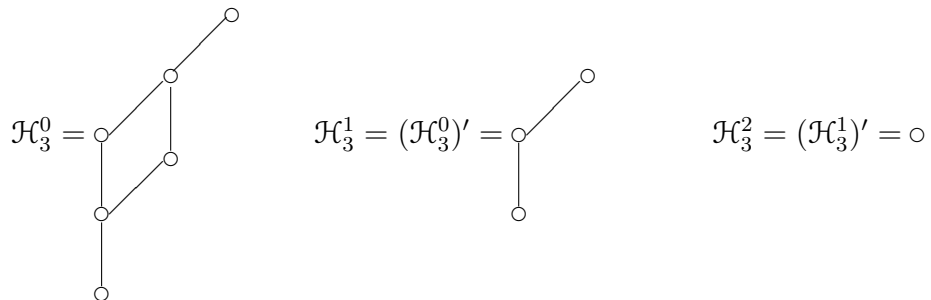


Figura 2.2.2

Para un entero positivo $n \geq k + 1$ se define el sistema de órbitas

$$\mathcal{S}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{O}_k^i.$$

\mathcal{S}_k denota el sistema de órbitas dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{S}_k = \begin{cases} \mathcal{H}_{i+j}^{|j-i-2|} & 2 \leq i+j \leq 2(k-1) \\ \emptyset & 2(k-1) \leq i+j \leq 2k \end{cases}$$

y para $n \geq 3$ fijo se define el poset

$$\mathcal{T}_n = \sum_{i=0}^{n-2} T_n^i$$

donde

$$T_n^i = \sum_{k=3}^n \sum_{j=0}^4 c_j R_i^j(k, m)$$

con $c_j \in \{0, 1\}$, ahora:

$$R_i^0(k, n) = C_k \text{ es una cadena de } k \text{ elementos,}$$

$$R_i^1(k, n) = \mathcal{H}_k, \mathcal{H}'_k = \mathcal{H}_{k-1},$$

$$R_i^2(k, n) = \mathcal{O}_k = \sum_{m=0}^{k-1} \mathcal{H}_k^{(m)}, \mathcal{O}'_k = \sum_{m=0}^{k-1} \mathcal{H}_k^{(m+1)}$$

$$R_i^3(k, n) = \mathcal{S}_k = \sum_{m=0}^{k-1} \mathcal{O}_k^{(m)}, \mathcal{S}'_k = \sum_{m=0}^{k-1} \mathcal{O}_k^{(m+1)}, \mathcal{S}_k^0 = \mathcal{S}_k$$

$$R_i^4(k, n) = \Pi_k^0 + \sum_{0 \leq j \leq 2} c_j R_i^j(k, n) = \Pi_k^t, \Pi_k^0 = \Pi_k = \sum_{m=0}^{k-1} \mathcal{S}_k^{(m)}$$

Si $\mathcal{L}_k^i \in \{C_k, \mathcal{H}_k, \mathcal{O}_k, \mathcal{S}_k, \Pi_k, \}$ y $\mathcal{L}_k^i \subset T_n^i$, entonces se induce un orden \trianglelefteq en los subconjuntos $\mathcal{L}_k^{i_1}, \mathcal{L}_k^{i_2} \subset T_n^i$ de tal forma que:

$$\mathcal{L}_k^{i_1} \trianglelefteq \mathcal{L}_k^{i_2} \text{ si y solo si } \mathcal{L}_k^{i_2} = (\mathcal{L}_k^{i_1})^{(s)} \text{ para algún } s \geq 0$$

entonces para cada $n \geq 3$ e $i \geq 0$ hay una partición de T_n^i de la siguiente forma:

$$T_n^i = \sum_{k \geq 2i_r \geq 1} \sum \mathcal{L}_k^{i_r}$$

donde $\mathcal{L}_k^{i_j+1} \trianglelefteq \mathcal{L}_k^{i_j}$ para un número finito de $\mathcal{L}_k^{i_r}$ (llamado subconjunto de partes o componentes del subconjunto correspondiente a T_n^i). Los subconjuntos \mathcal{L}_k^r son retículos completos tal que:

$$T_n^1 = \mathcal{H}_{n-1} \text{ para } n \geq 4$$

$$T_n^2 = \mathcal{O}_{n-2} \text{ para } n \geq 5$$

$$T_n^3 = \mathcal{S}_{n-3} \text{ para } n \geq 6$$

$$T_n^i = T_{n-1}^i + N_n^i \text{ con } N_n^i = \sum_{h=1}^{n-i} N_{n-h}^{i-1} \text{ para } n \geq 4$$

en particular

$$N_n^1 = R_0^0(n, n)$$

$$N_n^2 = \mathcal{H}_{n-2} \text{ para } n \geq 6$$

$$N_n^3 = \mathcal{O}_{n-3} \text{ para } n \geq 7$$

$$N_n^4 = \mathcal{S}_{n-4} \text{ para } n \geq 8$$

A continuación se describen \mathcal{T}_n para $n = 3, 4, 5$

$$\mathcal{T}_3 = R_0^0(3, 3) + R_1^0(2, 3) = C_3 + C_2$$

$$\mathcal{T}_4 = R_0^0(4, 4) + R_1^1(3, 4) + R_2^0(3, 4) = C_4 + \mathcal{H}_3 + C_3$$

$$\mathcal{T}_5 = R_0^0(5, 5) + R_1^1(4, 5) + R_2^2(3, 5) + R_3^0(4, 5) = C_5 + \mathcal{H}_4 + \mathcal{O}_3 + C_4$$

y se obtiene la siguiente identidad.

Proposición 2.2.1. Para $n \geq 3$ y $0 \leq h \leq n - 2$ se tiene lo siguiente.

$$|T_n^h| = \begin{cases} n & \text{si } h = 0 \\ n - 1 & \text{si } h = n - 2 \\ |T_n^{n-2}| + |T_{n-1}^{n-1}| & \text{si } h = n - 3 \\ |T_{n-1}^{h-1}| + |T_{n-1}^h| & \text{otros casos} \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.2.

$$\begin{aligned} |T_3^0| &= 3, |T_3^1| = 2 \\ |T_4^0| &= 4, |T_4^1| = 6, |T_4^2| = 3 \\ |T_5^0| &= 5, |T_5^1| = 10, |T_5^2| = 10, |T_5^3| = 4 \end{aligned}$$

En consecuencia de la proposición anterior se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. Para $n \geq 3$

$$|T_n^h| = \begin{cases} \binom{n}{h+1} & \text{si } 0 \leq h \leq n-3 \\ n-1 & \text{si } h = n-2 \end{cases}$$

Nota 2.2.1. Se puede representar el poset $\mathcal{T}_n = (U_0; U_x \mid x \in \mathcal{T}_n)$ de tal manera que si $\mathcal{H}_k^{(s)}$ es una componente de T_n^r para n, r, s, k entonces:

$$d_{i+1} = \dim U_{i+1}/\text{Rad } U_{i+1} = \dim U_{i+1}/\text{Rad } U_i - 1 = d_i - 1$$

$$\dim U_{\text{Inf } T_n^r} = h_n^r, \quad 1 \leq r \leq n-2$$

$$\dim U_{\text{Sup } T_n^0} = 2^{n-1} - 1$$

$$\dim U_{\text{Sup } T_n^{n-1}} = n-1$$

En este caso, si $\mathcal{O}^i, \mathcal{O}^{i+1}$ y $\mathcal{H}_k^{(s)}, \mathcal{H}_k^{(s+1)}$ son componentes consecutivas de T_n^r entonces

$$\dim U_{\text{Inf } \mathcal{H}_k^{s+1}} = \dim U_{\text{Sup } \mathcal{H}_k^s} - 1$$

$$\dim U_{\text{Sup } \mathcal{H}_{i, k-i+1}^{k-2i-1}} = \dim U_{\text{Inf } \mathcal{H}_{i+1, i}^{i-2}} - 1$$

Las identidades de la nota anterior definen un vector dimensión \mathcal{T}_n con bloque de enteros dadas por las sucesiones g_n^r y T_n^r (máximo y longitud respectivamente), y de esta manera se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.2. Para $n \geq 3$

$$\dim U_0 = \sum_{i \in \mathcal{T}_n} d_i = \sum_{r=0}^{n-3} [t_{g_n^r} - t_{g_n^r - |T_n^r|}] + t_{n-1}$$

2.3. Un Caso del Número de Anticadenas en el Conjunto 2^n

Considérese el subposet $(2^n, \preceq)$ del poset $\mathcal{P}_n = (2^n, \subseteq)$, si $x = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ y $y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ entonces:

$$x \preceq y \text{ si y solo si } x_i \leq y_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq k$$

El orden \preceq define en 2^n una suma de la forma

$$T_n^i = \sum_{k \geq 2i_r \geq 1} \sum \mathcal{L}_k^{i_r}$$

T_n^h es una correspondencia biyectiva entre el conjunto de puntos $x_h \in 2^n$ con h el primer elemento ($1 \leq h \leq n-1$).

En este caso, para $n \geq 3$ fijo, el subconjunto de la forma $x_h = \{1, 2, 3, \dots, h\}$ es el mínimo de la primera componente de T_n^h y el número de puntos de \mathcal{P}_n incomparables con x_h es g_n^h , obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1. Si \mathcal{A}_n^2 denota el número de anticadenas de dos puntos en \mathcal{P}_n entonces

$$\mathcal{A}_n^2 = \sum_{r=0}^{n-3} [t_{g_n^r} - t_{g_n^r - |T_n^r|}] + t_{n-1}$$

Demostración Para n fijo, Sea \mathcal{M}_n el poset $(2^n, \preceq)$ entonces \mathcal{M}_n es isomorfo a \mathcal{T}_n y para cada $1 \leq r \leq n-1$, el subposet $T_n^r \subset \mathcal{T}_n$ está definido por todos los subconjuntos de r -puntos de \mathcal{M}_n . Note que, $x_r = \{1, 2, \dots, r\}$ es el punto minimal de T_n^r , entonces el número de los puntos de \mathcal{P}_n incomparables con x_r denotada por $|\text{Ind } x_r|$ es g_n^r . En particular $|\text{Ind } x_1| = 2^{n-1} - 1$, $|\text{Ind } x_{n-1}| = n-1$ y $|\text{Ind } u| = |\text{Ind } v| + 1$ si $u = \max u_{\blacktriangle}$ y $u, v \in T_n^r$. Además, si \mathcal{L}_k^j y \mathcal{L}_k^{j+1} son componentes consecutivos de T_n^r , $u = \text{Sup } \mathcal{L}_k^j$ y $v = \text{Inf } \mathcal{L}_k^{j+1}$ entonces $|\text{Inc } v| = |\text{Inc } u| + 1$. Por lo tanto, por cada $x_i \in T_n^r$ se tiene que $|\text{Inc } x_i| = \dim U_{x_i} / \text{rad } U_{x_i}$ es el vector dimensión de la representación de \mathcal{T}_n dadas en la nota 2.2.1. Entonces, el número de anticadenas de dos puntos que uno de sus puntos pertenecen a T_n^r es $[t_{g_n^r} - t_{g_n^r - |T_n^r|}]$, si $r \neq n-1$ implica que

$$\mathcal{A}_n^2 = \sum_{r=0}^{n-3} [t_{g_n^r} - t_{g_n^r - |T_n^r|}] + t_{n-1}$$

□

Ejemplo 2.3.1. Sea el poset \mathcal{P}_3 y su diagrama de Hasse descrito a continuación

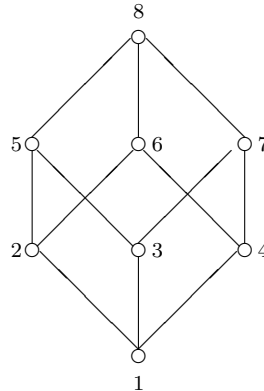


Figura 2.3.1

entonces $g_3^0 = 3$, $T_3^0 = \binom{3}{1} = 3$ luego $\mathcal{A}_3^2 = t_{g_3^0} - t_{g_3^0 - T_3^0} + t_2 = 6 + 3 = 9$

La sucesión A016269 = $\{0, 1, 9, 55, 285, 1351, 6069, 26335, 111645, \dots\}$ describe el número de anticadenas de dos elementos en el poset $\mathcal{P}_n = (2^n, \subseteq)$.

CAPÍTULO

3

NÚMERO DE SECCIONES EN EL CARCAJ DE AUSLANDER-REITEN DE ÁLGEBRAS DEL TIPO DYNKIN

Ringel [15] presenta las funciones Dynkin, esto es, funciones a valor entero independientes de orientación (mas generalmente a valor real) para que las categorificaciones sean inducidas por los diagramas de Dynkin \mathbb{A}_n , \mathbb{B}_n , \mathbb{C}_n , \mathbb{D}_n , \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 , \mathbb{E}_8 , \mathbb{F}_4 y \mathbb{G}_2 por tanto Ringel sugiere la creación de una nueva enciclopedia con objetivos similares a los propuestos por la OEIS pero cuyo objeto de estudio sea las funciones Dynkin. En este capítulo se presentará el comportamiento del número de secciones del carcaj de Auslander-Reiten de álgebras hereditarias de tipo representación finito con grafo subyacente del tipo \mathbb{A}_n , \mathbb{D}_n , \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 y \mathbb{E}_8 para categorificar las sucesiones A083329, A000295, A049611 y A052951 [2].

3.1. Del Tipo \mathbb{A}_n

Si $x \in \Gamma A_0$ y x es un módulo indescomponible proyectivo asociado al punto i , los elementos de la órbita de x se notará por τ_i^{-n} para $i \in \mathbb{N}$. $S_{\mathbb{A}(n,a)}^{i_j}$ denota el número de secciones de un álgebra del tipo Dynkin \mathbb{A}_n , que tiene a sumideros en los puntos i_j con $1 \leq j \leq a$ (ubicados de izquierda y derecha).

Teorema 3.1.1. *Considérese el álgebra A orientada del tipo Dynkin de n puntos*

$$\circ \longleftarrow \circ \longleftarrow \cdots \longleftarrow \circ \longleftarrow \circ \quad \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \cdots \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ$$

entonces $S_{\mathbb{A}(n,1)}^1 = S_{\mathbb{A}(n,1)}^n = 2^{n-1}$ para $n \geq 1$.

Demostración. Sea A el álgebra orientada del tipo Dynkin con la siguiente numeración

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & \circ & \quad \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ \\ 1 & & 2 & & & & n-1 & & n & & n & & n-1 & & & 2 & & 1 \end{array}$$

Figura 3.1.1

entonces $\Gamma(\text{Mod } A)$ está dado por

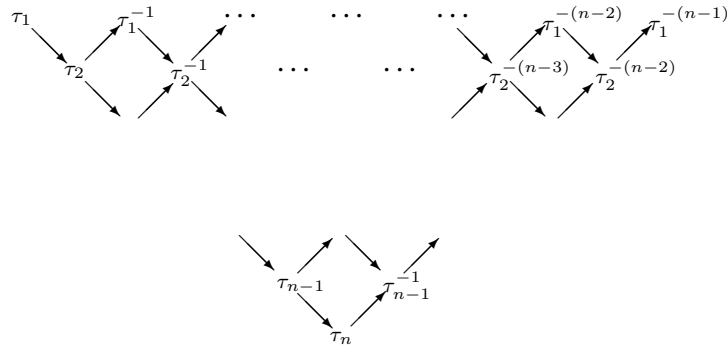


Figura 3.1.2

Se define la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \Gamma(\text{Mod } A) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \tau_r^{-s} & \longrightarrow & (s, n - r - s) \end{array}$$

con $1 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq n - 1$; por cada morfismo irreducible $[\tau_{r_1}^{-s_1}] \rightarrow [\tau_{r_2}^{-s_2}]$ en $\Gamma(\text{Mod } A)$ se describe una flecha en $\text{Im } \Psi \subseteq \mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

$$\Psi([\tau_{r_1}^{-s_1}] \rightarrow [\tau_{r_2}^{-s_2}]) = \begin{cases} (s_1, n - r_1 - s_1) \rightarrow (s_2, n - r_2 - s_2) & \text{si } r_1 > r_2 \text{ y } s_1 < s_2 \\ (s_2, n - r_2 - s_2) \rightarrow (s_1, n - r_1 - s_1) & \text{si } r_1 < r_2 \text{ y } s_1 = s_2 \end{cases}$$

entonces $\text{Im } \Psi$ es un carcaj. El número de caminos que empiezan en $(0, 0)$ y finalizan en (i, h) (notado por $|P_{(0,0)}^{(i,h)}|$) está dado por $\binom{i+h}{h}$, los conjuntos $P_{(0,0)}^{(i,h)}$ con $i + h = n - 1$ cumplen:

$$\sum_{h=0}^{i+h} |P_{(0,0)}^{(i,h)}| = 2^{n-1} \text{ para } n \geq 1$$

que coincide con el número de secciones de $\Gamma(\text{Mod } A)$.

□

Proposición 3.1.1. *Considérese el álgebra A orientada del tipo Dynkin de n puntos*

$$\circ \longrightarrow \circ \longleftarrow \cdots \longleftarrow \circ \longleftarrow \circ \quad \mathbf{0} \quad \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \cdots \longrightarrow \circ \longleftarrow \circ$$

entonces $S_{\mathbb{A}(n,1)}^2 = S_{\mathbb{A}(n,1)}^{n-1} = 3(2^{n-2}) - 1$ para $n \geq 2$.

Demostración Sea A el álgebra orientada del tipo Dynkin con la siguiente numeración

$$\circ_n \longrightarrow \circ_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow \circ_{n-2} \longleftarrow \circ_{n-1} \quad \mathbf{0} \quad \circ_{n-1} \longrightarrow \circ_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \circ_1 \longleftarrow \circ_n$$

Figura 3.1.3

entonces $\Gamma(\text{Mod } A)$ está dado por

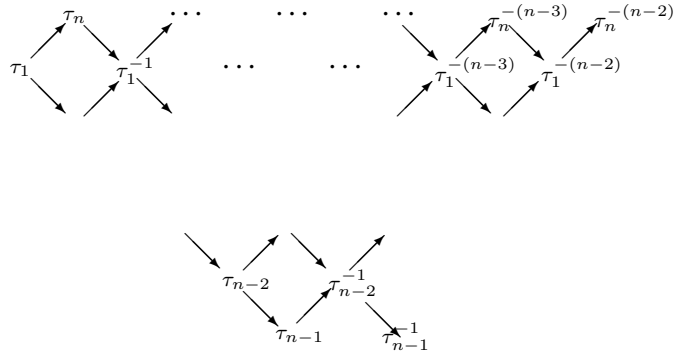


Figura 3.1.4

Se define la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : \Gamma(\text{Mod } A) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \tau_r^{-s} &\longrightarrow \begin{cases} (s, n-1-(r+s)) & \text{para } 1 \leq r \leq n-1 \\ (s+1, n-2-s) & \text{para } r = n \end{cases} \end{aligned}$$

con $0 \leq s \leq n-2$, además por cada morfismo irreducible $[\tau_{r_1}^{-s_1}] \rightarrow [\tau_{r_2}^{-s_2}]$ en $\Gamma(\text{Mod } A)$ se describe una flecha en $\text{Im } \Psi \subseteq \mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Psi([\tau_{r_1}^{-s_1}] \rightarrow [\tau_{r_2}^{-s_2}]) = & \\ \begin{cases} (s_1, n-1-(r_1+s_1)) \rightarrow (s_2, n-1-(r_2+s_2)) & \text{si } r_1 > r_2, s_1 < s_2 \text{ y } 1 \leq r_1 \leq n-1 \\ (s_2, n-1-(r_2+s_2)) \rightarrow (s_1, n-1-(r_1+s_1)) & \text{si } r_1 < r_2, s_1 = s_2 \text{ y } 1 \leq r_1 \leq n-1 \\ (s_1, n-1-(r_1+s_1)) \rightarrow (s_1+1, n-2-s_1) & \text{si } r_2 = n, s_1 = s_2 \text{ y } r_1 = 1 \\ (s_1+1, n-2-s_1) \rightarrow (s_2, n-1-(r_2-s_2)) & \text{si } r_1 = n, s_2 = s_1+1 \text{ y } r_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Como $\text{Im}\Psi$ es un carcaj, entonces

$$\sum_{h=0}^{i+h} \left| P_{(0,0)}^{(i,h)} \right| = 2^{n-1} - 1$$

para $i + h = n - 1$; además $\left| P_{(1,-1)}^{(i,h)} \right| = \left| P_{(1,0)}^{(i,h)} \right|$ para $i + h = n - 1$, y

$$\sum_{h=0}^{i+h} \left| P_{(1,0)}^{(i,h)} \right| = \sum_{h_1=0}^{i_1+h_1} \left| P_{(0,0)}^{(i_1,h_1)} \right| = 2^{n-2}$$

para $i_1 + h_1 = n - 2$, entonces

$$\sum_{h=0}^{i+h} \left| P_{(0,0)}^{(i,h)} \right| + \sum_{h_1=0}^{i_1+h_1} \left| P_{(0,0)}^{(i_1,h_1)} \right| = 3(2^{n-2}) - 1$$

para $n \geq 2$ que coincide con el número de secciones de $\Gamma(\text{Mod } A)$.

□

Corolario 3.1.1. $S_{\mathbb{A}(n,1)}^2 = S_{\mathbb{A}(n-1,1)}^2 + S_{\mathbb{A}(n-1,1)}^1 + S_{\mathbb{A}(n-2,1)}^1$ para $n \geq 3$.

Demostración Sea el subcarcaj $B \subseteq \text{Im}\Psi$ definido por la Proposición 3.1.1, donde los puntos (i, j) cumplen la condición $2 \leq i \leq n - 1$, $0 \leq j \leq n - 2$; entonces

$$\sum_{h=0}^{i+h} \left| P_{(2,0)}^{(i,h)} \right| = \sum_{h_1=0}^{i_1+h_1} \left| P_{(0,0)}^{(i_1,j_1)} \right| = 2^{n-3} = S_{\mathbb{A}(n-2,1)}^1$$

con $i + h = n - 1$, $i_1 + j_1 = n - 2$; el número de caminos que pasan por los puntos $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (2, 0)$ coincide con $\sum_{h=0}^{i+h} \left| P_{(2,0)}^{(i,h)} \right|$. Sea $W \subseteq \text{Im}\Psi$ donde los puntos (s, t) cumplen con la condición $0 \leq s \leq n - 2$, $1 \leq t \leq n - 2$; entonces

$$\sum_{h_2=0}^{i_2+h_2} \left| P_{(0,1)}^{(i_2,h_2)} \right| = \sum_{h_3=0}^{i_3+h_3} \left| P_{(0,0)}^{(i_3,j_3)} \right| = 2^{n-2} - 1$$

con $i_2 + h_2 = n - 1$, $i_3 + h_3 = n - 2$; el número de caminos que pasan por los puntos $(0, 0) \rightarrow (0, 1)$ coincide con $\sum_{h_2=0}^{i_2+h_2} \left| P_{(1,0)}^{(i_2,h_2)} \right|$. Sea $T \subseteq \text{Im}\Psi$, donde los puntos (w, x) cumplen con la condición $1 \leq w \leq n - 2$, $1 \leq x \leq n - 2$; entonces

$$\sum_{h_4=0}^{i_4+h_4} \left| P_{(1,1)}^{(i_4,h_4)} \right| = \sum_{h_5=0}^{i_5+h_5} \left| P_{(0,0)}^{(i_5,j_5)} \right| = 2^{n-3} = S_{\mathbb{A}(n-2,1)}^1$$

con $i_4 + h_4 = n - 1$, $i_5 + h_5 = n - 2$; el número de caminos que pasan por los puntos $(0, 0) \rightarrow (1, 0)$ coincide con $\sum_{h_4=0}^{i_4+h_4} \left| P_{(1,1)}^{(i_4,h_4)} \right|$. Sea $M \subseteq \text{Im}\Psi$, donde los puntos (y, z) cumplen con la condición $1 \leq y \leq n - 2$, $0 \leq z \leq n - 2$;

$$\sum_{h_6=0}^{i_6+h_6} \left| P_{(1,0)}^{(i_6,h_6)} \right| = \sum_{h_7=0}^{i_7+h_7} \left| P_{(0,0)}^{(i_7,j_7)} \right| = 2^{n-2} = S_{\mathbb{A}(n-1,1)}^1$$

con $i_6 + h_6 = n - 1$, $i_7 + h_7 = n - 2$; $\sum_{h=0}^{i+h} \left| P_{(1,-1)}^{(i,h)} \right|$ coincide con $\sum_{h_6=0}^{i_6+h_6} \left| P_{(1,0)}^{(i_6,h_6)} \right|$. Por tanto

$$S_{\mathbb{A}(n,1)}^2 = S_{\mathbb{A}(n-2,1)}^1 + 2^{n-2} - 1 + S_{\mathbb{A}(n-2,1)}^1 + S_{\mathbb{A}(n-1,1)}^1 = S_{\mathbb{A}(n-1,1)}^2 + S_{\mathbb{A}(n-2,1)}^1 + S_{\mathbb{A}(n-1,1)}^1$$

□

A continuación se presenta el teorema que generaliza el número de secciones del tipo Dynkin de n puntos con un sumidero.

Teorema 3.1.2. $S_{\mathbb{A}(n,1)}^m = 2 \left(S_{\mathbb{A}(n-1,1)}^{m-1} \right) + \sum_{i=0}^{m-2} \binom{n-2}{i}$ para $n \geq 3$ y $1 \leq m < n$
con las condiciones $S_{\mathbb{A}(n,1)}^1 = S_{\mathbb{A}(n,1)}^n = 2^{n-1}$.

Demostración Sea A un álgebra con grafo subyacente \mathbb{A}_n con la siguiente numeración

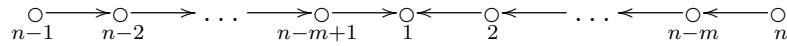


Figura 3.1.5

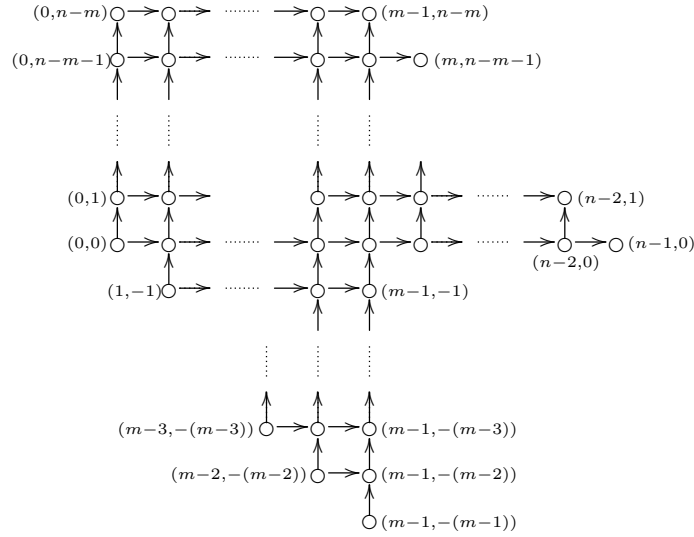
en $\Gamma(\text{mod } A)$, se toma el subcarcaj

$$W_k = \Gamma(\text{mod } A) \setminus \left(\left\{ \tau_i^0 \mid n - m + 1 \leq i \leq n - 2 \right\} \cup \tau_1 \right)$$

sea $W_{k-1} \subset \Gamma(\text{mod } A)$ definido de la siguiente manera

$$W_{k-1} = W_k \setminus \left\{ \tau_{n-1}^{-(j)} \mid 0 \leq j \leq n - m \right\}$$

entonces el subcarcaj W_{k-1} es isomorfo a $\Gamma(\text{mod } A_1)$ donde A_1 tiene como grafo subyacente el Dynkin \mathbb{A}_{n-1} con un sumidero en la posición m (de izquierda a derecha). Al escoger las secciones que contienen a $\tau_{n-2}^{-(j)}$ en W_{k-1} y se conectan con $\tau_{n-1}^{-(j-1)}$ en W_k se pueden construir secciones en W_k , de igual manera si se conectan con $\tau_{n-1}^{-(j)}$ en W_k se pueden construir secciones en W_k para $1 \leq j \leq n - m$; entonces existe una aplicación φ tal que el número de caminos admisibles de $\varphi(W_k)$ (notado por $|W_k|$) es igual a $2|W_{k-1}|$. Note que, $\Gamma(\text{mod } A)$ es isomorfo al siguiente diagrama;

**Figura 3.1.6**

Como $\left| P_{(s, -s)}^{(m-2, n-m)} \right| = \binom{n-2}{m-2-s}$ con $0 \leq s \leq m-2$, entonces el número de caminos admisibles es $2|W_{k-1}| + \sum_{i=0}^{m-2} \binom{n-2}{i}$ que coincide con el número de secciones de $\Gamma(\text{mod } A)$.

□

A continuación se presenta el siguiente resultado que describe el número de secciones del tipo \mathbb{A}_n utilizando una relación de recurrencia.

Corolario 3.1.2. $S_{\mathbb{A}(n,1)}^m = S_{\mathbb{A}(n-1,1)}^{m-1} + S_{\mathbb{A}(n-1,1)}^m + S_{\mathbb{A}(n-2,1)}^1$ para $n \geq 3$, $1 \leq m < n$ con las condiciones $S_{\mathbb{A}(n,1)}^1 = S_{\mathbb{A}(n,1)}^n = 2^{n-1}$.

Demostración Se realizará por inducción sobre n . Si $n = 3$ y $m = 2$,

$$S_{\mathbb{A}(3,1)}^2 = 2(S_{\mathbb{A}(2,1)}^2) + 1 = S_{\mathbb{A}(2,1)}^2 + S_{\mathbb{A}(2,1)}^1 + S_{\mathbb{A}(1,1)}^1$$

Suponga que se cumple para $n = k$ y $2 \leq m \leq n-1$. Sea $n = k+1$

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{A}(k+1,1)}^m &= 2(S_{\mathbb{A}(k,1)}^m) + \sum_{i=0}^{m-2} \binom{k-1}{i} \\ &= 2(S_{\mathbb{A}(k,1)}^m) + \sum_{i=0}^{m-2} \binom{k-2}{i} + \sum_{i=0}^{m-3} \binom{k-2}{i} \end{aligned}$$

utilizando la hipótesis de inducción para $(S_{\mathbb{A}(k,1)}^m)$ se tiene

$$\begin{aligned}
S_{\mathbb{A}(k+1,1)}^m &= 2(S_{\mathbb{A}(k-1,1)}^{m-1} + S_{\mathbb{A}(k-1,1)}^m + 2^{k-3}) + \sum_{i=0}^{m-2} \binom{k-2}{i} + \sum_{i=0}^{m-3} \binom{k-2}{i} \\
&= S_{\mathbb{A}(k,1)}^{m-1} + S_{\mathbb{A}(k,1)}^m + S_{\mathbb{A}(k-1,1)}^1
\end{aligned}$$

□

Utilizando el Teorema 3.1.2 y Proposición 3.1.2 se puede construir un triángulo que describe por cada nivel el número de secciones asociados a diagramas de Dynkin del tipo \mathbb{A}_n con un solo sumidero en la posición h (ordenados de izquierda a derecha) con $1 \leq h \leq n$.

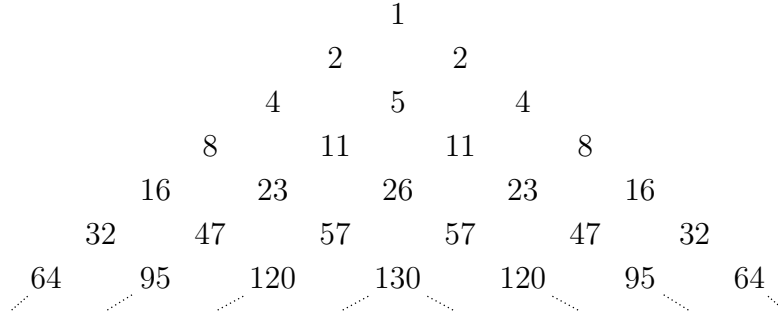


Figura 3.1.7

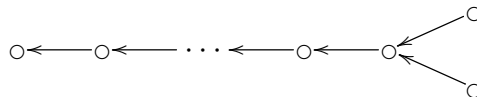
Datos importantes:

- La sucesión $a_n = S_{\mathbb{A}(n,1)}^2$ para $n \geq 2$ está descrita en A083329.
- La sucesión $b_n = S_{\mathbb{A}(n,1)}^3$ para $n \geq 3$ está descrita en A000295 (Números Eurilianos).
- La Sucesión $c_n = \sum_{h=1}^n S_{\mathbb{A}(n,1)}^h$ para $n \geq 1$ está descrita por A049611.

3.2. Del Tipo \mathbb{D}_n

Para este caso, se tomarán álgebras orientadas del tipo \mathbb{D}_n que tenga un solo sumidero. En adelante $S_{\mathbb{D}(n,a)}^{i_j}$ denota el número de secciones de un álgebra del tipo Dynkin \mathbb{D}_n , que tiene a sumideros en los puntos i_j con $1 \leq j \leq a$ (ubicados de izquierda y derecha).

Proposición 3.2.1. *Considérese el álgebra A orientada del tipo Dynkin de n puntos*



entonces $S_{\mathbb{D}(n,1)}^1 = 2^{n-3} (2n - 1)$ para $n \geq 4$.

Demostración Sea A un álgebra del tipo \mathbb{D}_n con la numeración admisible

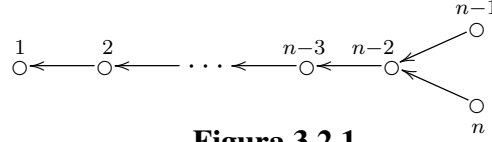


Figura 3.2.1

entonces $\Gamma(\text{Mod } A)$ está representado por la Figura 3.2.4. Sean los subcarcajes $w_i \subseteq \Gamma(\text{Mod } A)$ tal que

$$w_0 = \{ \tau_r^{-s} \mid 0 \leq s \leq n-3, 1 \leq r \leq n-2-s \}$$

y

$$w_i = \{ \tau_r^{-s} \mid i \leq s \leq n-2, 1 \leq r \leq n-2-(s-i) \}$$

con $1 \leq i \leq n-2$. Sea φ una aplicación adecuada, y para $\varphi(w_i)$ con $1 \leq i \leq n-2$, $|\varphi(w_i)| = |w_i|$ se multiplica por 2^2 dado que existen 4 posibles situaciones de tomar τ_{n-1}^{-i} o $\tau_{n-1}^{-(i-1)}$ y τ_n^{-i} o $\tau_n^{-(i-1)}$ en $\Gamma(\text{Mod } A)$. Entonces el número de caminos W_i asociado a $\varphi(w_i)$ es:

$$\begin{aligned} W_0 &= 2^{n-3} \\ W_1 &= (2^{n-3})2^2 \\ W_{n-2} &= 2^2 \\ W_k &= \left(2^{n-3} - \sum_{t=0}^{k-2} \binom{n-3}{t} \right) 2^2 \text{ para } 1 \leq k \leq n-4 \end{aligned}$$

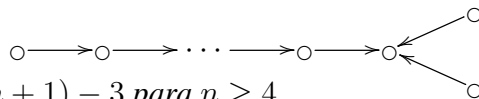
y el número total de caminos admisibles es

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{n-2} &= 2^{n-3} + (n-3)2^{n-1} - \left(\sum_{h=2}^{n-3} \sum_{t=0}^{h-2} \binom{n-3}{t} \right) 2^2 \\ &= 2^{n-3} (1 + (n-3)2^2 - 2(n-5)) \\ &= 2^{n-3} (2n-1) \end{aligned}$$

que coincide con el número de secciones de \mathbb{D}_n .

□

Proposición 3.2.2. *Considérese el álgebra A orientada del tipo Dynkin de n puntos*



entonces $S_{\mathbb{D}(n,1)}^{n-2} = 2^{n-2} (n+1) - 3$ para $n \geq 4$.

Demostración Sea A un álgebra del tipo \mathbb{D}_n con la siguiente numeración admisible

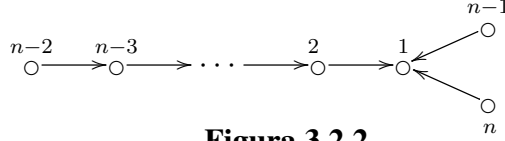


Figura 3.2.2

entonces $\Gamma(\text{Mod } A)$ está representado por la Figura 3.2.5. Sean los subcarcajes $w_i \subseteq \Gamma(\text{Mod } A)$ tal que

$$w_i = \{\tau_r^{-s} \mid 0 \leq s \leq i, i+1-s \leq r \leq n-2\}$$

con $0 \leq i \leq n-3$ y

$$w_{n-2} = \{\tau_r^{-s} \mid 1 \leq s \leq i, n-1-s \leq r \leq n-2\}$$

Sea φ una aplicación adecuada; para $\varphi(w_i)$ con $1 \leq i \leq n-2$, $|\varphi(w_i)| = |w_i|$ se multiplica por 2^2 dado que existen 4 posibles situaciones de tomar τ_{n-1}^{-i} o $\tau_{n-1}^{-(i-1)}$ y τ_n^{-i} o $\tau_n^{-(i-1)}$. Entonces el número de caminos W_i asociado a $\varphi(w_i)$ es:

$$\begin{aligned} W_0 &= 1 \\ W_{n-3} &= 2^{n-3} (2^2) \\ W_k &= \left(2^{n-3} - \sum_{t=0}^{n-4-k} \binom{n-3}{t} \right) 2^2 \text{ para } 1 \leq k \leq n-4 \end{aligned}$$

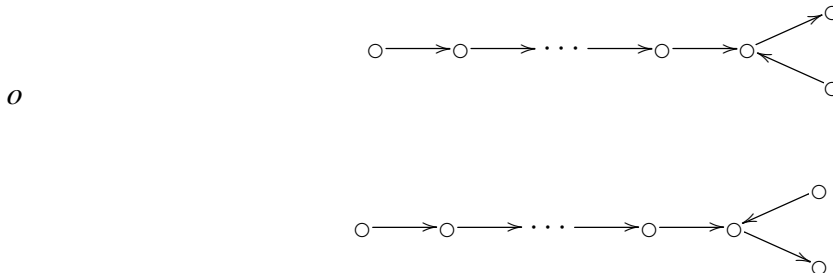
y el número total de caminos admisibles es

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{n-2} &= 2^{n-2} (2 + 2 + 2(n-4)) - \left(\sum_{h=1}^{n-5} \sum_{t=0}^{n-4-h} \binom{n-3}{t} \right) 2^2 - 3 \\ &= 2^{n-2} (4 + 2(n-4) - (n-5)) - 3 \\ &= 2^{n-2} (n+1) - 3 \end{aligned}$$

que coincide con el número de secciones de \mathbb{D}_n .

□

Proposición 3.2.3. *Considérese el álgebra A orientada del tipo Dynkin de n puntos*



entonces $S_{\mathbb{D}(n,1)}^{n-1} = S_{\mathbb{D}(n,1)}^n = 2^{n-2}(n) - 2$ para $n \geq 4$.

Demostración Sea A un álgebra del tipo \mathbb{D}_n con la numeración admisible

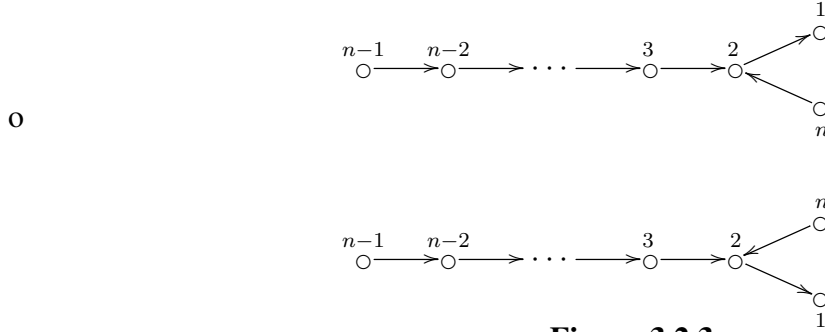


Figura 3.2.3

entonces $\Gamma(\text{Mod } A)$ está representado por la Figura 3.2.6 (Si n es par entonces $x = n$ y $y = n - 2$; si n es impar $x = 1$ y $y = n - 1$). Sean los subcarcajes $w_i \subseteq \Gamma(\text{Mod } A)$ tal que

$$w_i = \{\tau_r^{-s} \mid 0 \leq s \leq i, i + 2 - s \leq r \leq n - 1\}$$

con $0 \leq i \leq n - 3$ y

$$w_{n-2} = \{\tau_r^{-s} \mid 1 \leq s \leq i, n - s \leq r \leq n - 1\}$$

Sea φ aplicación adecuada, para $\varphi(w_i)$ con $1 \leq i \leq n - 3$, $|\varphi(w_i)| = |w_i|$ se multiplica por 2^2 dado que existen 4 posibles situaciones de tomar τ_{n-1}^{-i} o $\tau_{n-1}^{-(i-1)}$ y τ_n^{-i} o $\tau_n^{-(i-1)}$; y para $\varphi(w_{n-2})$, $|w_{n-2}|$ se multiplica por 2 dado que existen dos posibilidades de tomar; con n par ($\tau_n^{-(n-2)}$ o $\tau_n^{-(n-1)}$) o impar ($\tau_1^{-(n-1)}$ o $\tau_1^{-(n-2)}$). Entonces el número de caminos W_i asociado a $\varphi(w_i)$ es:

$$\begin{aligned} W_0 &= 2^2 - 2 \\ W_{n-3} &= 2^{n-3}(2^2) \\ W_{n-1} &= 2^{n-3}(2)W_k = \left(2^{n-3} - \sum_{t=0}^{n-4-k} \binom{n-3}{t}\right) 2^2 \text{ para } 1 \leq k \leq n-4 \end{aligned}$$

y el total de caminos admisibles es

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{n-2} &= 2^{n-2}(3 + 2(n-4)) - \left(\sum_{h=1}^{n-5} \sum_{t=0}^{n-4-h} \binom{n-3}{t}\right) 2^2 - 2 \\ &= 2^{n-2}(3 + 2(n-4) - (n-5)) - 2 \\ &= 2^{n-2}(n) - 2 \end{aligned}$$

que coincide con el número de secciones de \mathbb{D}_n .

□

A continuación se presenta el teorema que generaliza el número de secciones del tipo Dynkin \mathbb{D}_n de n puntos con un sumidero.

Teorema 3.2.1. *El número de secciones asociados a \mathbb{D}_n con un sumidero en la posición m es*

$$S_{\mathbb{D}(n,1)}^m = \begin{cases} 2S_{\mathbb{D}(n-1,1)}^m + 2^{n-2} + 1 & \text{si } m = 2 \\ 2S_{\mathbb{D}(n-1,1)}^m + 2^{n-2} + \sum_{i=0}^{m-3} 4 \binom{n-4}{i} + \binom{n-4}{m-2} & \text{si } 3 \leq m \leq n-3 \end{cases}$$

con $S_{\mathbb{D}(n,1)}^{n-2} = 2^{n-2} (n+1) - 3$.

Demostración Sea A un álgebra con grafo subyacente \mathbb{D}_n con la siguiente numeración

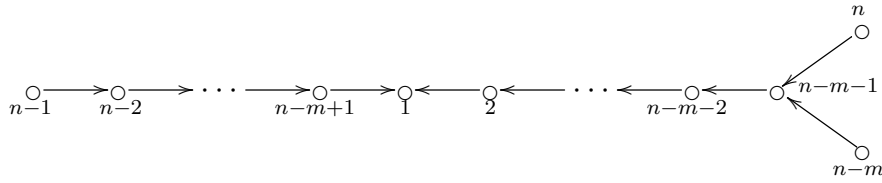


Figura 3.2.7

Sea $\Gamma(\text{mod } A)$, se define el subcarcaj

$$W_k = \Gamma(\text{mod } A) \setminus \left(\left\{ \tau_i^0 \mid n-m+1 \leq i \leq n-2 \right\} \cup \left\{ \tau_i^{-(n-2)} \mid i=n \text{ y } 2 \leq i \leq n-m \right\} \right)$$

sea $W_{k-1} \subset \Gamma(\text{mod } A)$ descrito por

$$W_{k-1} = W_k \setminus \left\{ \tau_{n-1}^{-(j)} \mid 0 \leq j \leq n-2 \right\}$$

el subcarcaj W_{k-1} es isomorfo a $\Gamma(\text{mod } A_1)$ donde A_1 tiene como grafo subyacente el Dynkin \mathbb{D}_{n-1} con un sumidero en la posición m (de izquierda a derecha). Al escoger todas las secciones que contienen a $\tau_{n-2}^{-(j)}$ en W_{k-1} y se conectan con $\tau_{n-1}^{-(j-1)}$ en W_k se construirán secciones en W_k , de igual manera si se conectan con $\tau_{n-1}^{-(j)}$ en W_k se construirán secciones en W_k para $1 \leq j \leq n-2$, entonces el número de secciones de $|W_k|$ es igual a $2|W_{k-1}|$. El subcarcaj de $\Gamma(\text{mod } A)$

$$W_{k_1} = \left\{ \tau_i^{-j} \mid 1 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-2 \right\}$$

es isomorfo a la figura 3,2,8.

$$\text{Sea } \left| P_{(s,-s)}^{(n-(m+1),-1)} \right| = \binom{n-(m+2)}{s-1} \text{ para } 1 \leq s \leq n-(m+1) \text{ y}$$

$$\sum_{i=1}^{n-(m-1)} \left| P_{(s,-s)}^{(n-(m+1),-1)} \right| = 2^{n-(m+2)}$$

De manera similar, sea $\left| P_{(n-(m+1),0)}^{(n-2-j,j)} \right| = \binom{m-1}{j}$ para $0 \leq j \leq m-1$ y $i = n-2-j$ y

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left| P_{(n-(m+1),0)}^{(n-2-j,j)} \right| = 2^{m-1}$$

entonces si T es el número de caminos $\left| P_{(s,-s)}^{(n-2-j,j)} \right|$ que pasan por los puntos $(n-(m+1), -1) \rightarrow (n-(m+1), 0)$ entonces coincide con 2^{n-3} .

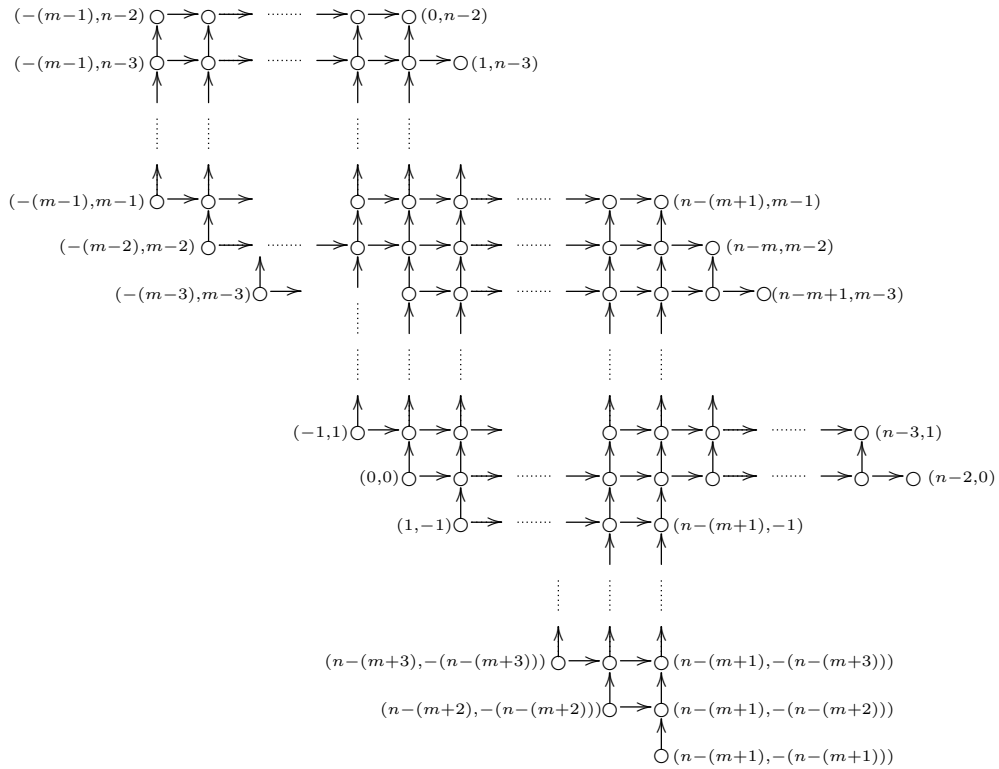


Figura 3.2.8

Como no se están tomando los elementos τ_n^{-j} en $\Gamma(\text{mod } A)$ para $m \leq j \leq n-2$ y $\tau_{n-(m+1)}^{-r}$ se puede conectar con $\tau_n^{-(r-1)}$ o τ_n^{-r} para $m+1 \leq r \leq n-2$ en $\Gamma(\text{mod } A)$; se definen los conjuntos

$$\begin{aligned} w_{p_1} &= \{ \tau_i^{-j} \mid 2 \leq i \leq n-m, n-i \leq j \leq n-2 \} \\ w_{p_2} &= \{ \tau_n^{-j} \mid m \leq j \leq n-2 \} \\ w_{p_3} &= \{ \tau_i^{-j} \mid n-m-1 \leq j \leq n-3, 2n-m-2-j \leq i \leq n-1 \} \\ w_{p_4} &= \left\{ \tau_i^{-(n-2)} \mid i=1 \text{ y } n-m+1 \leq i \leq n-1 \right\} \end{aligned}$$

en $\Gamma(\text{mod } A)$ el número de secciones de $W_p = w_{p_1} \cup w_{p_2} \cup w_{p_3} \cup w_{p_4}$ coincide con $2T = 2^{n-2}$. Ahora si W_t es el conjunto de

$$\left| P_{(-s, s+1)}^{(-1, n-2)} \right| = \binom{n-4}{s-1}$$

para $1 \leq s \leq m-1$.

Si $m = 2$ entonces $s = 1$ y

$$\left| P_{(-1, 2)}^{(-1, n-2)} \right| = \binom{n-4}{0}$$

que coincide con la sección $\{\tau_i \mid 1 \leq i \leq n\}$; al tomar los casos anteriores W_k , W_p y W_t se describe el número de secciones de A con un sumidero en la posición $m = 2$ el cual coincide con $2|w_{k-1}| + 2T + \binom{n-4}{0} = 2S_{\mathbb{D}(n-1,1)}^m + 2^{n-2} + 1$.

Si $3 \leq m \leq n-3$, W_t es

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left| P_{(-s, s+1)}^{(-1, n-2)} \right| = \sum_{i=1}^{m-1} \binom{n-4}{s-1} = \sum_{i=0}^{m-2} \binom{n-4}{i}$$

al definir los conjuntos

$$\begin{aligned} w_{p_5} &= \{\tau_i^{-j} \mid n-m+1 \leq i \leq n-2, 0 \leq j \leq n-2-i\} \\ w_{p_6} &= \{\tau_i^{-j} \mid 1 \leq i \leq n-m \text{ y } i = n, 0 \leq j \leq m-2\} \end{aligned}$$

el número de secciones de $w_{p_5} \cup w_{p_6}$ coincide con $4W_t - 3\binom{n-4}{m-2}$ dado que se tiene la posibilidad de que τ_{n-m-1}^{-j} se conecte con τ_n^{-j} o $\tau_n^{-(j-1)}$ y τ_{n-m}^{-j} o $\tau_{n-m}^{-(j-1)}$ para $1 \leq j \leq m-2$; al tomar los casos anteriores W_k , W_p y $4W_t - 3\binom{n-4}{m-2}$ se describe el número de secciones de A con un sumidero en la posición $3 \leq m \leq n-3$ el cual coincide con $2|w_{k-1}| + 2T + 4W_t - 3\binom{n-4}{m-2} = 2S_{\mathbb{D}(n-1,1)}^m + 2^{n-2} + 4 \sum_{i=0}^{m-3} \binom{n-4}{i} + \binom{n-4}{m-2}$.

□

A continuación se presenta el siguiente resultado.

Proposición 3.2.4. $S_{\mathbb{D}(n,1)}^m = S_{\mathbb{D}(n-1,1)}^{m-1} + S_{\mathbb{D}(n-1,1)}^m + 3(2^{n-3})$ para $n \geq 5$, $1 \leq m < n-2$ con las condiciones $S_{\mathbb{D}(n,1)}^1 = 2^{n-3}(2n-1)$ y $S_{\mathbb{D}(n,1)}^{n-2} = 2^{n-2}(n+1) - 3$.

Demostración Inducción sobre n . Si $n = 5$ y $m = 2$

$$\begin{aligned}
S_{\mathbb{D}(5,1)}^2 &= 2(S_{\mathbb{D}(4,1)}^2) + 2^3 + 1 \\
&= S_{\mathbb{D}(4,1)}^2 + 3(2^2) + 2^4(4) - 2 \\
&= S_{\mathbb{D}(4,1)}^2 + (2(4) - 1) + 3(2^2) \\
&= S_{\mathbb{D}(4,1)}^2 + S_{\mathbb{D}(4,1)}^1 + 3(2^2)
\end{aligned}$$

Suponga que se cumple para $n = k$ y $2 \leq m \leq n - 3$. Sea $n = k + 1$, para esta situación se deben tomar tres casos;

(a) Si $m = 2$,

$$S_{\mathbb{D}(k+1,1)}^2 = 2(S_{\mathbb{D}(k,1)}^2) + 2^{k-1} + 1$$

por hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned}
S_{\mathbb{D}(k+1,1)}^2 &= 2(S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^2 + S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^1 + 3(2^{k-3})) + 2^{k-1} + 1 \\
&= 2S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^2 + (k-1)2^{k-2} - 2^{k-3} + 3(2^{k-2}) + 2^{k-2} + 1 \\
&= 2S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^2 + 2^{k-3}(2k-1) + 2^{k-2} + 2(2^{k-2}) + 2^{k-2} + 1 \\
&= 2S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^2 + 2^{k-2} + 1 + 2^{k-3}(2k-1) + 3(2^{k-2}) \\
&= S_{\mathbb{D}(k,1)}^2 + S_{\mathbb{D}(k,1)}^1 + 3(2^{k-2})
\end{aligned}$$

(b) Si $m = 3$

$$S_{\mathbb{D}(k+1,1)}^3 = 2(S_{\mathbb{D}(k,1)}^3) + 2^{k-1} + 4\binom{k-3}{0} + \binom{k-3}{1}$$

por hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned}
S_{\mathbb{D}(k+1,1)}^3 &= 2(S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^3 + S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^2 + 3(2^{k-3})) + 2^{k-1} + 4\binom{k-3}{0} + \binom{k-3}{1} \\
&= 2S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^3 + 2^{k-2} + 4\binom{k-4}{0} + \binom{k-4}{1} + 2S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^2 + 2^{k-2} + 1 \\
&\quad + 3(2^{k-2}) \\
&= S_{\mathbb{D}(k,1)}^3 + S_{\mathbb{D}(k,1)}^2 + 3(2^{k-2})
\end{aligned}$$

(c) Si $m > 3$

$$S_{\mathbb{D}(k+1,1)}^m = 2(S_{\mathbb{D}(k,1)}^m) + 2^{k-1} + \sum_{i=0}^{m-3} 4\binom{k-3}{i} + \binom{k-3}{m-2}$$

por hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned}
S_{\mathbb{D}(k+1,1)}^m &= 2(S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^m + S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^{m-1} + 3(2^{k-3})) + 2^{k-1} \\
&\quad + 4 \sum_{i=0}^{m-3} \binom{k-3}{i} + \binom{k-3}{m-2} \\
&= 2S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^m + 2S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^{m-1} + 3(2^{k-2}) + 2^{k-2} + 2^{k-1} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m-4} 4 \binom{k-4}{i} + \sum_{i=0}^{m-3} 4 \binom{k-4}{i} + \binom{k-4}{m-3} + \binom{k-4}{m-2} \\
&= 2S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^m + 2^{k-2} + \sum_{i=0}^{m-3} 4 \binom{k-4}{i} + \binom{k-4}{m-2} + 2S_{\mathbb{D}(k-1,1)}^{m-1} \\
&\quad + 2^{k-2} + \sum_{i=0}^{m-4} 4 \binom{k-4}{i} \binom{k-4}{m-3} + 3(2^{k-2}) \\
&= S_{\mathbb{D}(k,1)}^m + S_{\mathbb{D}(k,1)}^{m-1} + 3(2^{k-2})
\end{aligned}$$

□

Utilizando el Teorema 3.2.1 y el Corolario 3.2.4 se puede construir un triángulo que describe por cada nivel el número de secciones asociados a diagramas de Dynkin del tipo \mathbb{D}_n con un solo sumidero en la posición h (ordenados de izquierda a derecha) con $1 \leq h \leq n - 2$.

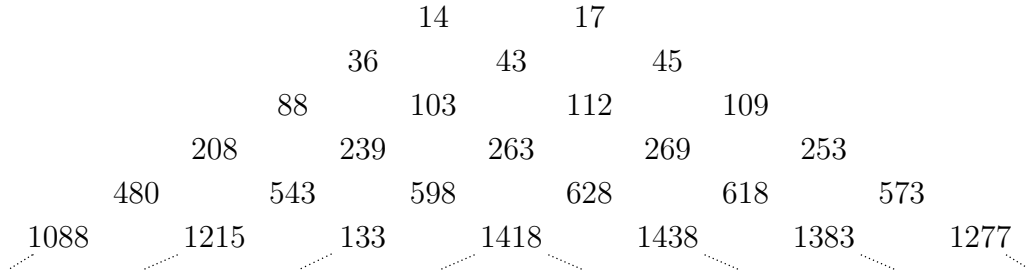


Figura 3.2.9

Datos importantes:

- La sucesión $d_n = S_{\mathbb{D}(n,1)}^1$ para $n \geq 4$ está descrita en A052951 que representa la expansión de $\frac{1+x-2x^2}{(1-2x)^2}$.

3.3. Del Tipo \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 y \mathbb{E}_8

Para representar el número de secciones en el carcaj de Auslader- Reiten asociados a los diagramas \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 y \mathbb{E}_8 se utilizará la siguiente notación.

Definición 3.3.1. Sea el diagrama de Dynkin del tipo \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 y \mathbb{E}_8 . El vector

$$S_{\mathbb{E}(i,1)} = (a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, a_i)$$

con $6 \leq i \leq 8$ y $1 \leq m \leq i$; donde m representa la posición del sumidero de izquierda a derecha y $m = i$ indica que la posición del vértice superior, describe el número de secciones del carcaj de Auslander-Reiten asociados a \mathbb{E}_i para cada sumidero en la posición m .

Ejemplo 3.3.1. Sea el álgebra A representada por el siguiente carcaj

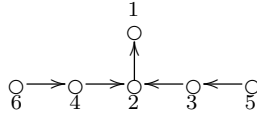


Figura 3.3.1

el carcaj de Auslander-Reiten ($\Gamma(\text{mod } A)$) es:

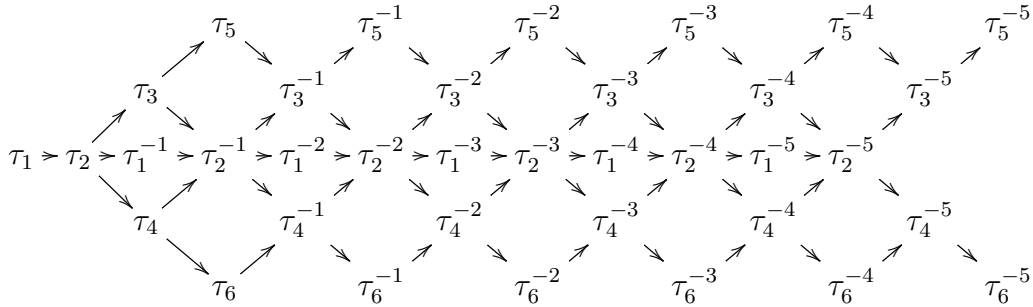


Figura 3.3.2

el número de secciones de \mathbb{E}_6 en la posición $m = 6$ es igual a $\mathbb{A}_6 = 132$. A continuación se describe los tres vectores asociados a \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 y \mathbb{E}_8 .

$$S_{\mathbb{E}(6,1)} = (124, 139, 147, 139, 124, 132)$$

$$S_{\mathbb{E}(7,1)} = (412, 443, 465, 462, 439, 408, 434)$$

$$S_{\mathbb{E}(8,1)} = (1532, 1595, 1647, 1663, 1637, 1583, 1520, 1584)$$

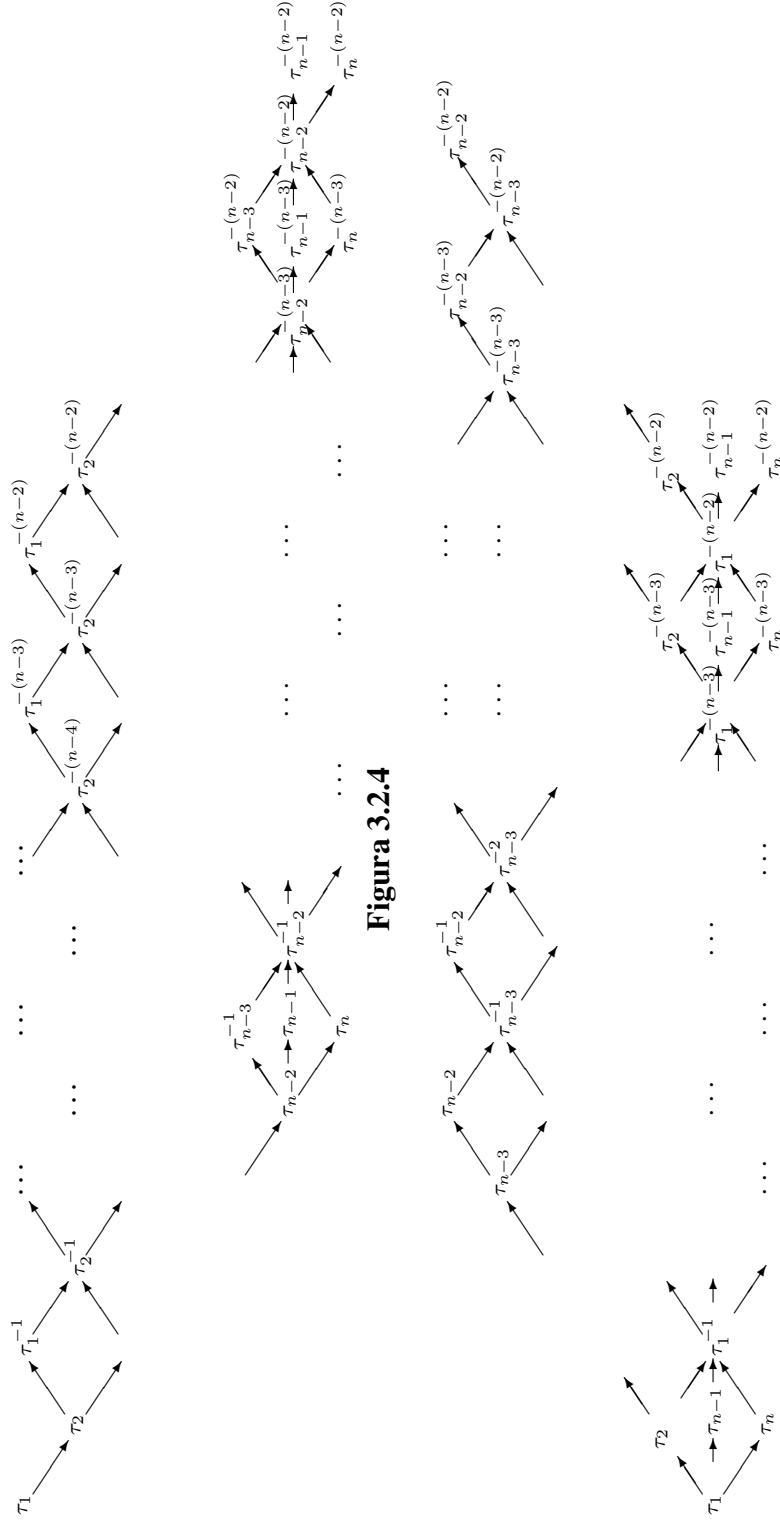
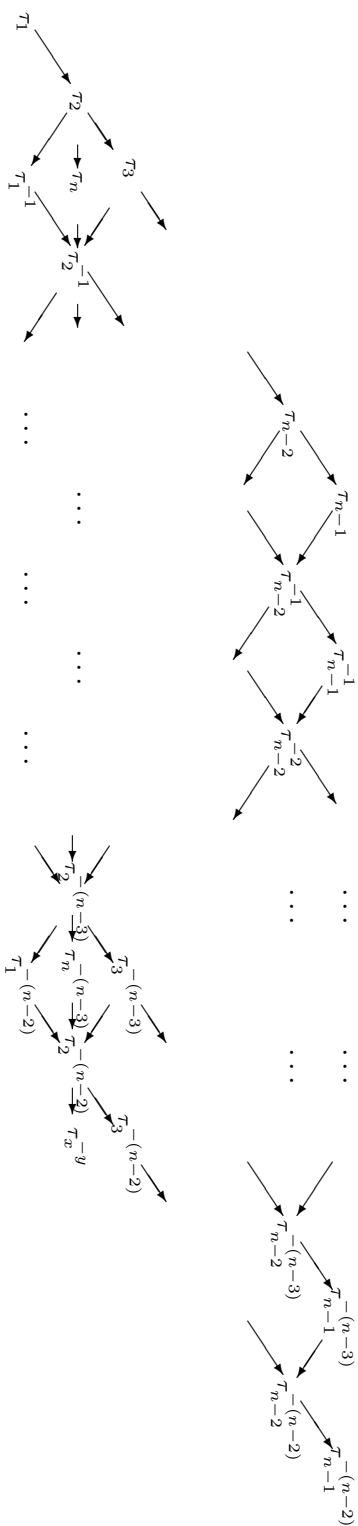


Figura 3.2.4

Figura 3.2.5



CAPÍTULO

4

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

4.1. Conclusiones

- La teoría de representaciones de álgebras y la teoría de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados identifican la sucesión A016269 que describe el número de anticadenas de dos elementos del poset \mathcal{P}_n .
- Se presentan los diagramas 3.1.7 y 3.2.4 que describen el número de secciones en la carcaj de Auslander-Reiten de álgebras del tipo \mathbb{A}_n para $n \geq 1$ y \mathbb{D}_n para $n \geq 4$ con un solo sumidero respectivamente; de esta manera se categorificaron las sucesiones A083329, A052951, A049611 y A000295 (Números Eurilianos.)

4.2. Trabajo Futuro

- Utilizando teoría de representaciones de álgebras presentar el número de anticadenas del poset \mathcal{P}_n de tres puntos.
- Generalizar el comportamiento del número de secciones en la carcaj de Auslander-Reiten para álgebras del tipo Dynkin con m sumideros.
- De acuerdo a lo descrito por Ringel en [15] identificar si el número de secciones del carcaj de Auslander-Reiten es una función Dynkin.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A.M. Cañadas, H. Giraldo, and G. B. Rios, *An algebraic approach to the number of some antichains in the powerset 2^n* , Jp Journal Of Algebra, Number Theory And Applications **38** ((2016)), 45 - 62.
- [2] A.M. Cañadas, H. Giraldo, and G. B. Rios, *On the Number of Sections in the Auslander-Reiten Quiver of Algebras of Dynkin Type*, (to appear).
- [3] A.M. Cañadas, P.F. Fernández Espinosa, and V. Cifuentes Vargas, *On Sums of Figurate numbers by Using Algorithms of Differentiation of Posets*, JPANTA.
- [4] ———, *On a problem of G.E. Andrews concerning partitions*, JPANTA **30** (2013), no. 2, 131-150.
- [5] A.M. Cañadas, *Categorical Description of Some Algorithms of Differentiation*, Ph.D Thesis-National University of Colombia (2007).
- [6] A.M. Cañadas, H. Giraldo, and V. Cifuentes Vargas, *Categorification of Some Integer Sequences and Higher Dimensional Partitions*, JPANTA.
- [7] A.M. Cañadas, H. Giraldo, and P.F. Fernández Espinosa, *Categorification of Some Integer Sequences*, JPANTA.
- [8] B.A. Davey and H.A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 2002.
- [9] A. Dickson, *Introduction to Graph Theory*, 2006.
- [10] M. M. Kleiner, *Partially ordered sets of finite type*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **28** (1972), 32-41.
- [11] M. Hazewinkel, N. Gubareni, and V.V Kirichencko, *Algebras, Rings and Modules*, Vol. 1, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [12] ———, *Algebras, Rings and Modules*, Vol. 2, Springer, 2010.
- [13] P. Fahr and C. M. Ringel, *Categorification of the Fibonacci Numbers Using Representations of Quivers*, arXiv.org (2011).
- [14] ———, *A Partition Formula for Fibonacci Numbers*, Journal of Integer Sequences **11** (2008).
- [15] C. M. Ringel, *The Catalan Combinatorics of the Hereditary Artin Algebras*, arXiv **1502.06553** (2015).

- [16] R. Stanley, *Ordered structures and partitions*, Mem. Amer. Math. Soc. **119** (1972).
- [17] D. Simson, *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Gordon and Breach, London, 1992.
- [18] D. Simson, I. Assem, and A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Vol. 1, Cambridge University Press, 2006.